

# الهندسة التحليلية المستوية



د. خيرية رمضان سيف

د. إبراهيم محمود إبراهيم

أ. علي جامع السيد



# الهندسة التحليلية المستوية

د. خيرية رمضان سيف

أ. على جامع السيد د. إبراهيم محمود إبراهيم

دار الترجمة  
الكويت

حقوق الطبع محفوظة  
الطبعة الأولى  
١٤١٥ هـ - ١٩٩٥ م

الناشر

دار الترجمة

نشر - ترجمة - طباعة - توزيع  
ت: ٢٤٢٨٨١١ - ٢٤٠٦٥٥٩  
فاكس: ٢٤٥٤٧٥٩  
ص.ب: ٢٢١٠٦ صفاة - الكويت

## بسم الله الرحمن الرحيم

### مقدمة

تعتبر الرياضيات من أعظم العلوم التي توصلت لها البشرية والتي لها الفضل الأعظم بتزويد العلوم الأخرى بأدوات التفكير وهي العامل الأساسي في نهضة الفكر العلمي . ولقد واكبت الرياضيات الحضارة البشرية وكانت من الأسباب الأولى والمباشرة في تطور الفكر والعلوم على اختلافها . ويؤكد التاريخ على أن البداية الحقيقية للرياضيات كان بظهور فرعي الحساب والهندسة كروافد رئيسية لهذا العلم ثم كان ظهور الجبر كتعميم للمشكلات الحسابية .

ومع التقدم العلمي المذهل والفيض الغزير من المعرفة الرياضية كنتاج لشورة البحث العلمي في الرياضيات كان من الطبيعي ظهور فروع جديدة من هذه المعرفة ، ومن هذا المنطلق كان ظهور الهندسة التحليلية أمراً طبيعياً فهي فرع المعرفة الرياضية الذي تم من خلاله الربط بين فرعي الهندسة والجبر . ولقد بدأت الممارسات المختلفة للهندسة التحليلية قبل اكتشافها بزمان طويل ، ولكن البداية الحقيقية لها كعلم وفن رياضي كان في القرن السابع عشر الميلادي حيث ساهمت الأبحاث العلمية في بناء هذا الفرع الرياضي الهام والذي قاد بالتالي إلى إكتشاف فروع جديدة فكانت الهندسة التحليلية هي الأساس الأول الذي ساهم في تطوير الرياضيات بداية من معالجة بعض المشكلات الهندسية بطرق تختلف عن الطريقة التركيبية التقليدية ثم كانت سبباً رئيسياً في ظهور علمي التفاضل والتكامل .

وفي الآونة الأخيرة ظهر إهتمام المشتغلين بالرياضيات في هذا الفرع من العلم الرياضي واحتلت الهندسة التحليلية مكاناً بارزاً بين مجالات المعرفة الرياضية خاصة كبداية طبيعية لعلمي التفاضل والتكامل وقد كان هذا دافعاً لعرض الهندسة التحليلية من خلال مؤلفات علمي التفاضل والتكامل . لكن الأسلوب في العرض ونقصد أسلوب التلازم بين عرض الهندسة التحليلية وعرض التفاضل والتكامل قد تسبب في أمرين هامين :

١- ندرة الكتب المتخصصة في الهندسة التحليلية خاصة في المكتبة العربية .

٢- المعرض من خلال التفاضل والتكامل لا يحقق احتياجات الدارس بالقدر الكافي فهو يقود المتخصص إلى الاختصار والتبسيط وعدم اقتحام المشكلات الهامة ومن واقع الخبرة الطويلة في التدريس بالجامعات والمعاهد العليا وإحساسنا بما يحتاجه الطالب عند دراسته للهندسة التحليلية وما ينبغي أن يعرض كي يستطيع من خلاله أن يشبع حاجته من هذا الفرع وأن يعتمد على نفسه في التحصيل كان إعداد هذا الكتاب .

وقد أعد هذا الكتاب ليقع في أربعة أبواب في كل باب منها العرض النظري الشامل ، بجانب الأمثلة المحلولة الوفيرة ، إضافة إلى العديد من التمارين في نهاية كل جزء من أجزاء الباب الواحد .

الباب الأول : يقدم دراسة شاملة للخط المستقيم بداية من مستوى الإحداثيات وتمثيل النقطة ، والمسافة بين نقطتين ، وإحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة ، وميل الخط المستقيم ، والعلاقة بين ميلي المستقيمان المتوازيان والمتعامدان ، والصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم ، وعائلة الخطوط المستقيمة وعلاقة المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية والخط المستقيم .

الباب الثاني : وقد خصص لدراسة الدائرة من خلال عرض الصور المختلفة لمعادلة الدائرة ، والعلاقة بين المستقيم والدائرة ، والعلاقة بين الدائرة ومحوري الإحداثيات ، معادلة وطول المماس للدائرة عند نقطة معلوم ، ومعادلة المماسين المرسومين من نقطة معلومة ، ومعادلة وتر التماس والخط القطبي لنقطة معلومة بالنسبة للدائرة ، والنقطتان المترافقتان والمثلث المترافق الذاتي للدائرة ، ومعادلة يوخمشتال ، والعلاقة بين دائرتين ، ومعادلة عائلة الدوائر التي تمر بنقطة تقاطع دائرتين ، ومعادلة المماس المشترك .

الباب الثالث : ويتضمن مفاهيم نقل ودوران المحاور ، ودوران مع الانتقال ، والقطع المكافئ ، والوتر البؤري العمودي ، ومعادلتا المماس والعمودي للقطع المكافئ عن نقطة عليه ، وشرط تماس المستقيم للقطع المكافئ ، ومعادلة الخط القطبي لنقطة معلومة بالنسبة للقطع المكافئ ، وطول تحت المماس وتحت العمودي لمنحنى ما ، والخواص الهندسية للقطع المكافئ .

الباب الرابع : ويتناول دراسة كل من القطع الناقص والقطع الزائد ، معادلة القطع الناقص ، والاختلاف المركزي ، والصورة القياسية للقطع الناقص ، وتعيين الاختلاف المركزي إذا علمت معادلة القطع ، ومعادلة القطع الناقص الناتجة من انتقال المحاور ، تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص ، ومعادلتا المماس والعمودي للقطع الناقص عند نقطة عليه ، وشرط تماس المستقيم للقطع الناقص ، ومعادلة وتر التماس ، ومعادلة الخط القطبي ، وطول تحت المماس وتحت العمودي ، والخواص الهندسية للقطع الناقص وقطر القطع الناقص ، معادلة القطع الزائد ، ومعادلة القطع الزائد الناتجة من انتقال المحاور ، وتعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد ، ومعادلتا المماس والعمودي للقطع الزائد ، وشرط تماس المستقيم للقطع الزائد ، ومعادلة وتر التماس ، ومعادلة زوج المستقيمين المرسومين من نقطة للقطع الزائد ، والخواص الهندسية للقطع الزائد .

وفي نهاية الكتاب تم عرض بعض المصطلحات الرياضية وبعض المراجع العلمية التي تتعلق بدراسة هذا الموضوع . ولقد راعينا من خلال عرضنا للموضوعات المختلفة ان يُقدّم بأسلوب علمي يسهل على الدارس مواصلة قراءتها والإفادة منها .

ندعو الله بالتوفيق والسداد .

المؤلفون





## الفهرس

رقم الصفحة

- ١١ . الباب الأول : الخط المستقيم
- ١٣ . (١-١) مستوى الإحداثيات وتمثيل النقطة
- ١٧ (٢-١) المسافة بين نقطتين في مستوى الإحداثيات
- ١٩ (٣-١) إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة
- ٣٥ تمارين (١-١)
- ٣٦ . (٤-١) التمثيل البياني للمعادلة والمحل الهندسي .
- ٤٠ تمارين (٢-١)
- ٤١ . (٥-١) ميل الخط المستقيم .
- ٤٥ (٦-١) العلاقة بين ميل الخط المستقيم وزاوية ميله .
- ٤٦ (٧-١) العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين وميلي المستقيمين المتعامدين .
- ٥٣ تمارين (٣-١)
- ٥٤ (٨-١) الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم .
- ٦٢ (٩-١) إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمين .
- ٦٢ (١٠-١) عائلة الخطوط المستقيمة .
- ٦٧ (١١-١) المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية والخط المستقيم .
- ٨٠ تمارين (٤-١)
- ٨٣ . الباب الثاني : الدائرة
- ٨٦ (١-٢) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق .
- ٨٦ (٢-٢) معادلة الدائرة بمعلومية مركزها ونصف قطرها .

رقم الصفحة

- ٨٧ (٣-٢) الصورة العامة لمعادلة الدائرة .
- ٨٩ (٤-٢) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة إذا علمت معادلتها .
- ٩١ (٥-٢) معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها .
- ١٠٠ تمارين (١-٢)
- ١٠١ (٦-٢) العلاقة بين المستقيم والدائرة .
- ١٠٩ (٧-٢) العلاقة بين الدائرة ومحوري الإحداثيات .
- ١١٦ (٨-٢) طول المماس المرسوم من نقطة معلومة لدائرة .
- ١١٧ (٩-٢) معادلة المماس للدائرة عند نقطة معلومة .
- ١٢٠ تمارين (٢-٢)
- ١٢٢ (١٠-٢) معادلة المماسين المرسومين من نقطة معلومة لدائرة .
- ١٢٤ (١١-٢) معادلة وتر التماس لنقطة معلومة بالنسبة للدائرة .
- ١٢٧ (١٢-٢) معادلة الخط القطبي لنقطة معلومة بالنسبة للدائرة .
- ١٢٩ (١٣-٢) النقطتان المترافقتان والمثلث المترافق الذاتي بالنسبة للدائرة .
- ١٣٤ (١٤-٢) معادلة يوخمشتال .
- ١٣٨ تمارين (٣-٢)
- ١٤٠ (١٥-٢) العلاقة بين دائرتين .
- ١٤٧ (١٦-٢) زاوية تقاطع دائرتين .
- ١٥٢ (١٧-٢) المعادلة العامة عائلة الدوائر التي تمر بنقطة تقاطع دائرتين .
- ١٥٤ (١٨-٢) نقطة التماس ومعادلة المماس المشترك .
- ١٥٧ تمارين (٤-٢)

|     |   |
|-----|---|
| ١٥٩ | الباب الثالث : تحويل الإحداثيات - القطع المكافئ   |
| ١٦١ | (١-٣) نقل المحاور .   |
| ١٦٤ | (٢-٣) دوران المحاور .   |
| ١٦٧ | (٣-٣) دوران مع انتقال .   |
| ١٧٢ | تمارين (١-٣)  |
| ١٧٣ | (٣-٤) القطع المكافئ .   |
| ١٧٨ | (٣-٥) الوتر البؤري العمودي .  |
| ١٧٩ | (٣-٦) المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ الناتجة من انتقال المحاور .                                 |
| ١٩١ | تمارين (٣-٢)  |
| ١٩٢ | (٣-٧) معادلتا المماس والعمودي للقطع المكافئ عند أي نقطة عليه .                                      |
| ١٩٤ | (٣-٨) شرط تماس المستقيم $ص = م س + ح$<br>للقطع المكافئ $ص^2 = ٤ أ س$                                |
| ١٩٥ | (٣-٩) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع $ص^2 = ٤ أ س$<br>لنقطة (س <sub>١</sub> ، ص <sub>١</sub> )     |
| ١٩٦ | (٣-١٠) معادلة الخط القطبي للنقطة (س <sub>١</sub> ، ص <sub>١</sub> )<br>بالنسبة للنقطة $ص^2 = ٤ أ س$ |
| ٢٠٦ | تمارين (٣-٣)  |
| ٢٠٧ | (٣-١١) تحت المماس وتحت العمودي لمنحنى ما .  |
| ٢٠٨ | (٣-١٢) طول تحت المماس وتحت العمودي لمنحنى ما  |
| ٢١٠ | (٣-١٣) الخواص الهندسية للقطع المكافئ  |
| ٢١٧ | (٣-١٤) قطر قطع الكافئ   |
| ٢٢١ | تمارين (٣-٤)  |

- ٢٢٣ الباب الرابع القطع الناقص - القطع الزائد
- ٢٢٧ (٤ - ١) معادلة القطع الناقص .
- ٢٣٠ (٤ - ٢) الاختلاف المركزي .
- ٢٣٢ (٤ - ٣) الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الناقص .
- ٢٣٣ (٤ - ٤) تعيين الاختلاف المركزي إذا عملت معادلة القطع .
- ٢٣٤ (٤ - ٥) معادلة القطع الناقص الناتجة من انتقال المحاور .
- ٢٣٥ (٤ - ٦) تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص .
- ٢٥٠ تمارين (٤ - ١)
- ٢٥١ (٤ - ٧) معادلتا المماس والعمودي للقطع الناقص عند نقطة عليه
- ٢٥٣ (٤ - ٨) شروط تماس المستقيم  $ص = م س + حـ$   
 للقطع الناقص  $١ = \frac{ص^2}{ص_٢} + \frac{س^2}{ص_١}$
- ٢٥٥ (٤ - ٩) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع الناقص  
 $١ = \frac{ص^2}{ص_٢} + \frac{س^2}{ص_١}$  للنقطة (س، ص<sub>١</sub>)
- ٢٥٧ (٤ - ١٠) معادلة الخط القطبي بالنسبة للقطع الناقص  
 $١ = \frac{ص^2}{ص_٢} + \frac{س^2}{ص_١}$  للنقطة (س، ص<sub>١</sub>)
- ٢٦٦ تمارين (٤ - ٢)
- ٢٦٧ (٤ - ١١) طول تحت المماس وتحت العمودي  
 للقطع الناقص عند النقطة (س، ص<sub>١</sub>) .
- ٢٦٨ (٤ - ١٢) الخواص الهندسية للقطع الناقص .
- ٢٧٧ (٤ - ١٣) قطر القطع الناقص .

## رقم الصفحة

|     |  |
|-----|--|
| ٢٨٠ | تمارين (٤-٣)   |
| ٢٨٣ | (٤-١٤) معادلة القطع الزائد .   |
| ٢٨٥ | (٤-١٥) الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الزائد .                |
| ٢٨٧ | (٤-١٦) معادلة القطع الزائد الناتجة من انتقال المحاور .               |
| ٢٨٨ | (٤-١٧) تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد .                 |
| ٢٨٩ | (٤-١٨) معادلتا المماس والعمودي للقطع الزائد عند نقطة عليه            |
| ٢٩٠ | (٤-١٩) شرط تماس المستقيم $ص = م س + ح$ للقطع الزائد                  |
|     | $١ = \frac{ص^2}{ص_1} - \frac{ص^2}{ص_2}$                              |
| ٢٩١ | (٤-٢٠) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع الزائد                        |
|     | $١ = \frac{ص^2}{ص_1} - \frac{ص^2}{ص_2} \text{ للنقطة } (ص_1, ص_2) .$ |
| ٢٩١ | (٤-٢١) معادلة زوج المستقيمان المماسين المرسومين                      |
|     | من النقطة $(ص_1, ص_2)$ .   |
| ٢٩٢ | (٤-٢٢) الخواص الهندسية للقطع الزائد .                                |
| ٣٠٧ | تمارين (٤-٤)   |
| ٣٠٩ | المصطلحات الرياضية   |
| ٣١٥ | المراجع  |



## الباب الأول

### الخط المستقيم

- (١-١) مستوى الإحداثيات وتمثيل النقطة .
- (٢-١) المسافة بين نقطتين في مستوى الإحداثيات
- (٣-١) إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة
- تمارين (١-١)
- (٤-١) التمثيل البياني للمعادلة والمحل الهندسي .
- تمارين (٢-١)
- (٥-١) ميل الخط المستقيم .
- (٦-١) العلاقة بين ميل الخط المستقيم وزاوية ميله .
- (٧-١) العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين وميلي المستقيمين المتعامدين .
- تمارين (٣-١)
- (٨-١) الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم .
- (٩-١) إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمين .
- (١٠-١) عائلة الخطوط المستقيمة .
- (١١-١) المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية والخط المستقيم .
- تمارين (٤-١)





## الباب الأول الخط المستقيم

### (١ - ١) مستوى الإحداثيات وتمثيل النقطة:

قبل القرن السادس عشر الميلادي كان ينظر إلى الجبر والهندسة كموضوعات منفصلة تماماً .

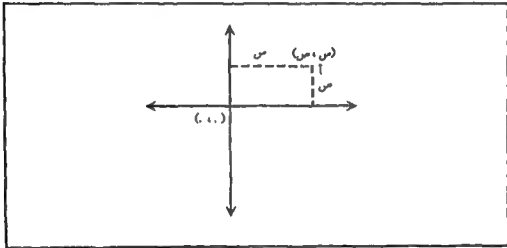
وأول من لاحظ أنه يمكن ربط الموضوعين معاً في موضوع واحد هو «رينيه ديكار» (١٥٩٦ - ١٦٥٠) وهذا الموضوع هو ما نسميه الآن بالهندسة التحليلية .

ودراسة الهندسة التحليلية في فصولها القادمة توضح جلياً كيفية الدمج بين الجبر والهندسة معاً إذ يمكن باستخدامها تمثيل بعض المعادلات الجبرية هندسياً بواسطة المنحنيات البسيطة وهي المستقيم والدائرة والقطوع الثلاثة المكافئ والناقص والزائد . وعلى جانب آخر وصف هذه المنحنيات الهندسية بمعادلات جبرية لتوضيح مفاهيم التفاضل والتكامل .

والفكرة الأساسية لهذا الربط والتي يرجع الفضل فيها للعالم الفرنسي «ديكار» هي تمثيل كل نقطة في المستوى ببُعديها عن مستقيمين متعامدين يلتقيان في نقطة تسمى بنقطة الأصل .

وبناء على التعريف فإن إحداثيات هذه النقطة (نقطة الأصل) هي ( . ، . ) وسنرمز لها بالحرف  $r$  ويسمى المستقيمان المتعامدان بمحوري الإحداثيات

أحدهما يسمى بمحور السينات والآخر يسمى بمحور الصادات ويسمى بعدا النقطة عن كل من المحورين السيني والصادي بالإحداثي السيني والصادي للنقطة على الترتيب ويكتب هذان الإحداثيان على صورة زوج مرتب مسقطه الأول هو الإحداثي السيني ومسقطه الثاني هو الإحداثي الصادي .



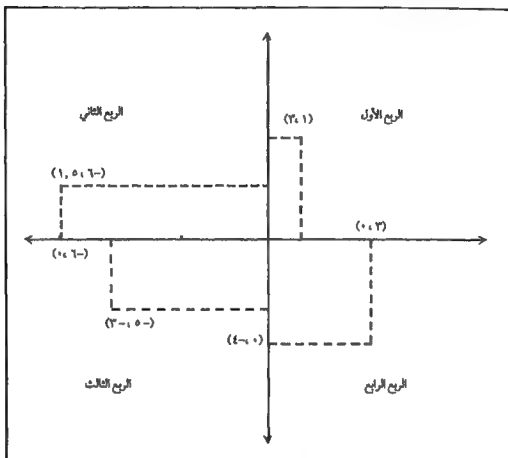
شكل (١-١)

فمثلاً النقطة أ الموضحة بالشكل (١-١) إحداثياتها هي (س ، ص) . وبهذه الطريقة نكون قد خصصنا لكل نقطة في المستوى زوجاً مرتباً وحيداً من الأعداد (س ، ص) وأيضاً فإن كل زوج مرتب يخصه نقطة واحدة - وواحدة فقط - في المستوى وبذلك فإنه يكون لدينا تطبيقاً من

$$\{(s, s) : s \in \mathbb{R}\} \leftarrow \text{مجموعة نقاط المستوى}$$

بحيث يقرن هذا التطبيق كل نقطة في المستوى بزوج مرتب وحيد في مجموعة الأزواج المرتبة .

والشكل (٢-١) يوضح تمثيل مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي



شكل (٢-١)

وواضح أن محورا الإحداثيات يقسمان المستوى الإحداثي إلى أربعة أرباع كل ربع عبارة عن مجموعة من النقاط ويمكن وصف كل ربع كمجموعة من النقاط كما يلي :

- الربع الأول =  $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$
- الربع الثاني =  $\{(x, y) : x < 0, y > 0\}$
- الربع الثالث =  $\{(x, y) : x < 0, y < 0\}$
- الربع الرابع =  $\{(x, y) : x > 0, y < 0\}$

كذلك فإن كلا من المحور السيني والمحور الصادي يمكن وصفهما كمجموعة من

النقاط كما يلي :

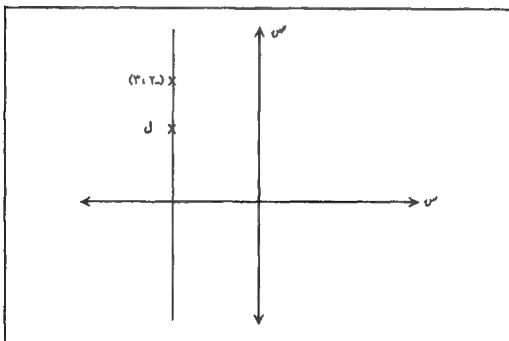
$$\{ (س، ص) : ص \geq 0، ص = 0 \} = \text{المحور السيني}$$

$$\{ (س، ص) : ص \geq 0، س = 0 \} = \text{المحور الصادي}$$

مثال (١-١) :

اكتب مجموعة النقاط التي تمثل المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر

بالنقطة  $(٣، ٢)$  .



شكل (١-٣)

ل يوازي محور الصادات انظر شكل (١-٣)

∴ بعد المستقيم عن محور الصادات = مقدار ثابت

∴ الإحداثي السيني لأي نقطة عليه = ثابت

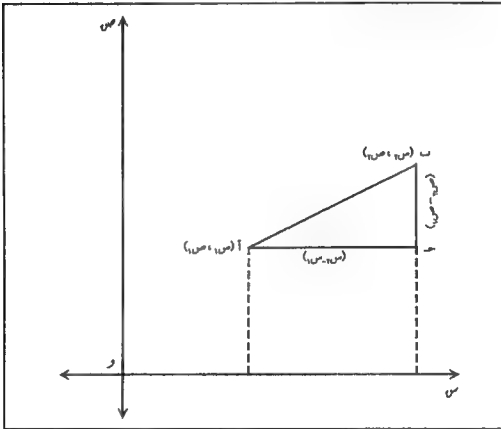
∴ المستقيم يمر بالنقطة  $(-2, 3)$

∴ الإحداثي السيني  $-2 =$  دائماً .

وصف المستقيم :

$$L = \{ (s, v) : s = -2, v \in \mathbb{R} \}$$

(١-٢) المسافة بين نقطتين في مستوى الإحداثيات:



شكل (١-٤)

نفرض أن النقطتين أ ، ب تعينان في مستوى الإحداثيات بالزوجين المرتبين

$(s_1, v_1)$  ،  $(s_2, v_2)$  على الترتيب ولتعيين المسافة |أ ب| فإننا :

نحدد النقطتين أ ، ب كما في شكل (١-٤) ونصل بينهما ونحدد الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لكل نقطة على الرسم ثم نكمل المثلث القائم الزاوية أ ح ب .

$$\text{فنجد أن } |أ ح| = |ص_٢ - ص_١|$$

$$، |أ ب| = |ص_٢ - ص_١|$$

ويعطى نظرية فيثاغورث في المثلث أ ح ب

$$\therefore |أ ب|^2 = |أ ح|^2 + |ب ح|^2$$

$$= |ص_٢ - ص_١|^2 + |ص_١ - ص_٢|^2$$

$$\therefore |أ ب| = \sqrt{|ص_٢ - ص_١|^2 + |ص_١ - ص_٢|^2}$$

والقانون السابق يسمى بقانون البعد أو قانون المسافة بين نقطتين .

**نتيجة (١) :**

البعد بين النقطتين أ  $\equiv$  (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) ، ونقطة الأصل .

$$|أ ب| = \sqrt{|ص_٢ - ص_١|^2 + |ص_١ - ص_٢|^2}$$

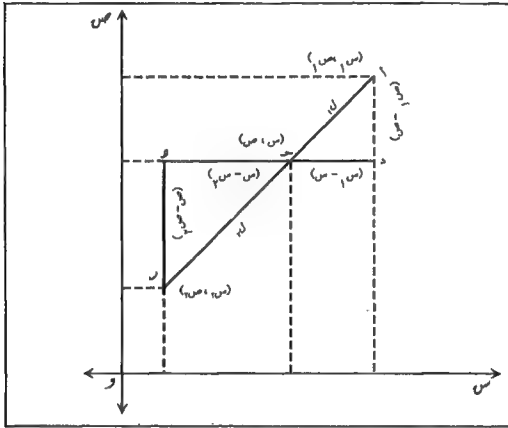
$$= \sqrt{|ص_٢|^2 + |ص_١|^2}$$

استخدمنا الرمز |أ ب| للدلالة على قياس القطعة المستقيمة أ ب

أي أن |أ ب| نعني بها البعد أو المسافة بين النقطتين أ ، ب .

(٣-١) إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة.

أولاً: من الداخل :



شكل (٥-١)

لنفرض القطعة المستقيمة أ ب حيث

$$أ \equiv (x_1, y_1), ب \equiv (x_2, y_2)$$

حـ  $\equiv (x, y)$  تقسم المسافة بين أ، ب من الداخل بنسبة ل<sub>١</sub> : ل<sub>٢</sub>

من شكل (٥-١) ومن تشابه المثلثين أ حـ د، ب حـ د

نجد أن :

$$\frac{ل_1}{ل_2} = \frac{|د-ح_أ|}{|ح_أ-د|} = \frac{|د_أ|}{|د_أ-د|}$$

$$\frac{ل_1}{ل_2} = \frac{س_1 - س_2}{س_2 - س_1} = \frac{ص_1 - ص_2}{ص_2 - ص_1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{ل_1}{ل_2} = \frac{س_1 - س_2}{س_2 - س_1} \quad \text{ومنها}$$

$$ل_1 (س_2 - س_1) = ل_2 (س_1 - س_2) \Leftrightarrow$$

$$ل_1 س_2 - ل_1 س_1 = ل_2 س_1 - ل_2 س_2 \Leftrightarrow$$

$$ل_1 س_2 + ل_2 س_2 = ل_2 س_1 + ل_1 س_1 \Leftrightarrow$$

$$ل_1 (ل_2 + س_2) = ل_2 (ل_1 + س_1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{ل_1 ل_2 + ل_1 س_2}{ل_2 + ل_1} = س \quad \therefore$$

$$\frac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_2 + ل_1} = \text{وبالمثل فإن ص}$$

$$\left( \frac{ل_1 ل_2 + ل_1 س_2}{ل_2 + ل_1}, \frac{ل_1 ل_2 + ل_2 س_1}{ل_2 + ل_1} \right) \equiv \text{إحداثيات نقطة التقسيم ح}$$

والطريقة التالية تسهل لك كتابة إحداثي نقطة التقسيم :

$$\begin{array}{ccc} & + & \\ ص_1 & \nearrow & \\ & + & \\ ل_1 & \searrow & \\ & + & \\ ل_2 & \nearrow & \\ & + & \end{array}$$

$$\frac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_2 + ل_1} = ص$$

$$\begin{array}{ccc} & + & \\ س_1 & \nearrow & \\ & + & \\ ل_1 & \searrow & \\ & + & \\ ل_2 & \nearrow & \\ & + & \end{array}$$

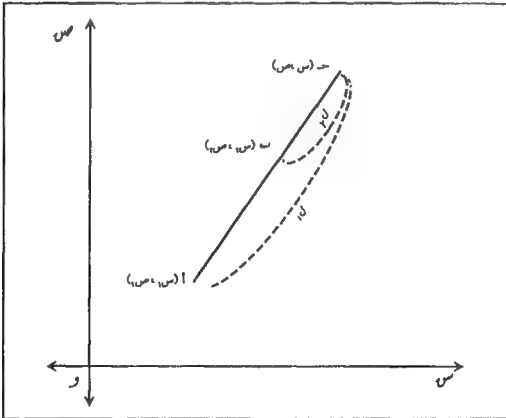
$$\frac{ل_1 ل_2 + ل_2 س_1}{ل_2 + ل_1} = س$$



## ثانياً : التقسيم من الخارج

بنفس الطريقة السابقة ومن الرسم الموضح شكل (١-٦) يمكننا استنتاج  
إحداثيات النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة أ ب حيث  $A \equiv (س_١, ص_١)$  ،  
 $B \equiv (س_٢, ص_٢)$  من الخارج بنسبة  $١ : ٢$  .

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ص} & \nearrow & \text{ص} \\ & \times & \\ \text{ل} & \nwarrow & \text{ل} \end{array} & \begin{array}{ccc} \text{ص} & \nearrow & \text{ص} \\ & \times & \\ \text{ل} & \nwarrow & \text{ل} \end{array} \\ \\ \frac{\text{ل} \text{ ص} ١ - ٢ \text{ ل} \text{ ص} ٢}{\text{ل} ١ - \text{ل} ٢} = \text{ص} & \frac{\text{ل} \text{ ص} ١ - ٢ \text{ ل} \text{ ص} ٢}{\text{ل} ١ - \text{ل} ٢} = \text{ص} \end{array}$$



شكل (١-٦)

نتائج :

(١) إحداثيات نقطة تنصيف قطعة مستقيمة .

نفرض القطعة المستقيمة أ ب

حيث أ  $\equiv (س١ ، ص١)$  ، ب  $\equiv (س٢ ، ص٢)$

نفرض أن ح  $\equiv (س ، ص)$  بحيث أ ح = ح ب

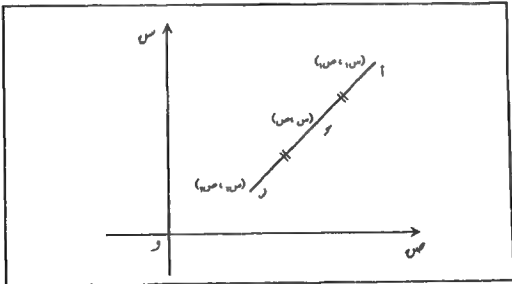
أي أن ح في منتصف أ ب (شكل ٧-١)

$$س = \frac{س١ \times ١ + س٢ \times ١}{١ + ١} = \frac{س١ + س٢}{٢}$$

$$ص = \frac{ص١ \times ١ + ص٢ \times ١}{١ + ١} = \frac{ص١ + ص٢}{٢}$$

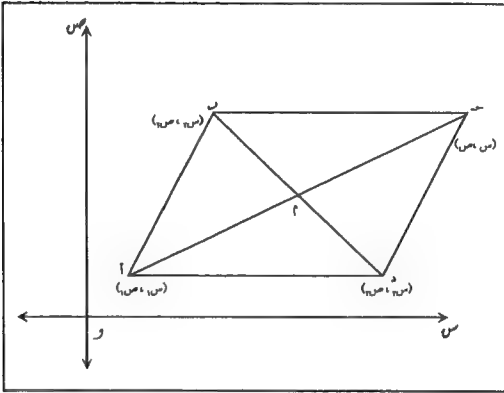
وذلك باعتبار أن النسبة أ ح : ح ب = ١ : ١

$$\therefore ح \equiv \left( \frac{س١ + س٢}{٢} , \frac{ص١ + ص٢}{٢} \right)$$



شكل (٧-١)

(٢) إحداثيات الرأس الرابع في متوازي الأضلاع :



شكل (١-٨)

يمكن استخدام النتيجة السابقة (١) في إيجاد إحداثيات الرأس الرابع في متوازي الأضلاع .

فإذا علمت ثلاثة رؤوس من متوازي الأضلاع أ ب ح د

$$أ \equiv (س_١ , ص_١) , ب \equiv (س_٢ , ص_٢) , د \equiv (س_٣ , ص_٣)$$

والمطلوب تعيين إحداثيات الرأس الرابع ح  $\equiv (س , ص)$  .

[انظر شكل (١-٨) .

فمن خواص متوازي الأضلاع :

م ملقى القطرين  $\overline{أ ح}$  ،  $\overline{ب د}$

∴ م هي منتصف كل منهما

∴ إحداثيات م هي

$$\text{من منتصف } \overline{أ ح} \left( \frac{ص_1 + ص_3}{2} , \frac{س_1 + س_3}{2} \right)$$

، إحداثيات م أيضاً هي :

$$\text{من منتصف } \overline{ب د} \left( \frac{ص_2 + ص_4}{2} , \frac{س_2 + س_4}{2} \right)$$

$$(1) \quad \frac{ص_2 + ص_4}{2} = \frac{ص_1 + ص_3}{2} \quad \therefore$$

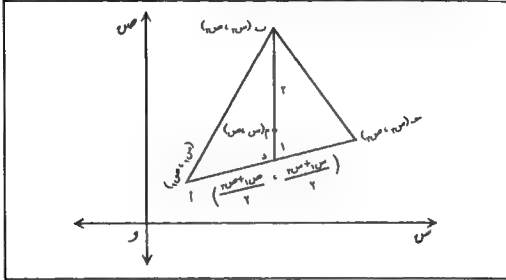
$$(2) \quad \frac{ص_2 + ص_4}{2} = \frac{ص_1 + ص_3}{2} \quad \therefore$$

ومن (1)، (2) ∴  $ص_2 + ص_4 = ص_1 + ص_3$  ،  $ص_2 + ص_4 = ص_1 + ص_3$  ،  $ص_2 + ص_4 = ص_1 + ص_3$

∴ إحداثيات الرأس الرابع

$$\overline{ح} \equiv (ص_2 + ص_4 - ص_1 , س_2 + س_4 - س_1)$$

### (٣) إحداثيات نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث



شكل (١-٩)

إذا كان أ ب ح مثلث رؤوسه على الترتيب هي

$(س١, ص١)$  ،  $(س٢, ص٢)$  ،  $(س٣, ص٣)$  على الترتيب

م ملتقى القطع المتوسطة في المثلث

المطلوب : تعيين إحداثيات النقطة م  $(س, ص)$

∴  $\overline{ب د}$  قطعة متوسطة في المثلث أ ب ح

∴ د في منتصف  $\overline{أ ح}$

∴ إحداثيات د هي  $\left( \frac{س١+س٣}{٢} , \frac{ص١+ص٣}{٢} \right)$  نتيجة (١)

النقطة م (نقطة تلاقي القطع المتوسطة) تقع على القطعة المتوسطة  $\overline{ب د}$

وتقسمها من الداخل بنسبة ١ : ٢ من جهة د .

باستخدام قانون التقسيم من الداخل يمكن إيجاد إحداثيات م

$$\begin{array}{c} \text{ص} + \text{ص} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \frac{\text{ص} + \text{ص}}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{ص} + \text{ص} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \frac{\text{ص} + \text{ص}}{2} \end{array}$$

$$\frac{\frac{\text{ص} + \text{ص}}{2} \times 2 + \text{ص} \times 1}{2 + 1} = \text{ص} \quad , \quad \frac{\frac{\text{ص} + \text{ص}}{2} \times 2 + \text{ص} \times 1}{2 + 1} = \text{ص}$$

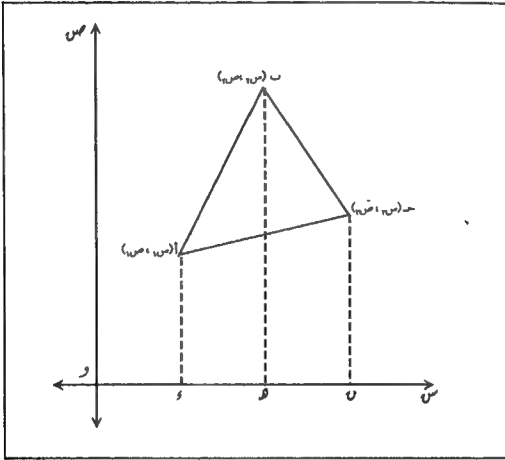
$$\frac{\text{ص} + \text{ص} + \text{ص}}{3} = \text{ص} \quad , \quad \frac{\text{ص} + \text{ص} + \text{ص}}{3} = \text{ص} \quad \text{ومنها ص}$$

∴ إحداثيات نقطة تلاقي القطع المتوسطة هي :

$$\left( \frac{\text{ص} + \text{ص} + \text{ص}}{3} , \frac{\text{ص} + \text{ص} + \text{ص}}{3} \right) \equiv \text{م}$$

## نظرية : (١-١)

إيجاد مساحة المنطقة المثلثية إذا علمت إحداثيات الرؤوس الثلاثة



شكل (١ - ١٠)

نفرض أ ب ح مثلث، إحداثيات رؤوسه أ ، ب ، ح هي على الترتيب

$(س١، ص١)$  ،  $(س٢، ص٢)$  ،  $(س٣، ص٣)$

المطلوب :

إيجاد مساحة المنطقة المثلثية أ ب ح .

البرهان :

باستخدام الرسم الموضح بشكل (١٠١) .

مساحة المنطقة المثلثية أ ب حـ

$$= | \text{مساحة المنطقة شبه المنحرفة أ ب هـ د} + \text{مساحة المنطقة شبه المنحرفة ب هـ ن حـ} - \text{مساحة المنطقة شبه المنحرفة أ د ن حـ} |$$

$$= \left| \frac{1}{2} (ص_1 + ص_2) (ص_1 - ص_2) + \frac{1}{2} (ص_2 + ص_3) (ص_2 - ص_3) - \frac{1}{2} (ص_1 + ص_3) (ص_1 - ص_3) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} (ص_1 + ص_2) (ص_1 - ص_2) + \frac{1}{2} (ص_2 + ص_3) (ص_2 - ص_3) - \frac{1}{2} (ص_1 + ص_3) (ص_1 - ص_3) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} (ص_1 + ص_2) (ص_1 - ص_2) + \frac{1}{2} (ص_2 + ص_3) (ص_2 - ص_3) - \frac{1}{2} (ص_1 + ص_3) (ص_1 - ص_3) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} (ص_1 + ص_2) (ص_1 - ص_2) + \frac{1}{2} (ص_2 + ص_3) (ص_2 - ص_3) - \frac{1}{2} (ص_1 + ص_3) (ص_1 - ص_3) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} (ص_1 + ص_2) (ص_1 - ص_2) + \frac{1}{2} (ص_2 + ص_3) (ص_2 - ص_3) - \frac{1}{2} (ص_1 + ص_3) (ص_1 - ص_3) \right|$$

$$\therefore \text{مساحة } \Delta \text{ أ ب حـ} = \frac{1}{2} | ص_1 (ص_2 - ص_3) + ص_2 (ص_3 - ص_1) + ص_3 (ص_1 - ص_2) |$$

$$= \frac{1}{2} | ص_1 (ص_2 - ص_3) + ص_2 (ص_3 - ص_1) + ص_3 (ص_1 - ص_2) |$$

$$= \frac{1}{2} | ص_1 (ص_2 - ص_3) + ص_2 (ص_3 - ص_1) + ص_3 (ص_1 - ص_2) |$$

$$= \frac{1}{2} | ص_1 (ص_2 - ص_3) + ص_2 (ص_3 - ص_1) + ص_3 (ص_1 - ص_2) |$$

ويمكن كتابتها بصورة المحدد كما يلي :

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ص_1 & 1 & 1 \\ ص_2 & 1 & 2 \\ ص_3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \frac{1}{2} = \text{مساحة المنطقة المثلثية أ ب حـ}$$

$$\Delta \frac{1}{2} =$$

حيث  $\Delta$  = المحدد المذكور في (١)



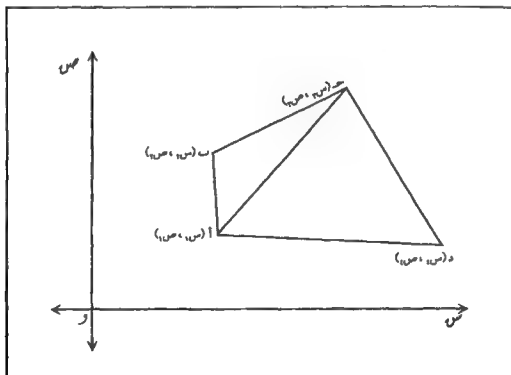
نتائج :

(١) تكون النقط الثلاث أ ، ب ، ح على إستقامه واحده إذا كان مساحة المنطقة المثلثية أ ب ح = ٠

أي أن الشرط اللازم لتقع النقط الثلاث أ ، ب ، ح على إستقامه واحدة هو :

$$٠ = \Delta$$

(٢) يمكن باستخدام هذه النظرية تعيين مساحة أي منطقة رباعية معلوم رؤوسها الأربعة وذلك بتقسيمها إلى منطقتين مثلثتين بتوصيل أحد الأقطار وباستخدام النظرية يمكن إيجاد مساحة كلا من المنطقتين المثلثتين وجمعهما يمكن إيجاد مساحة المنطقة الرباعية كما في شكل (١-١١) .

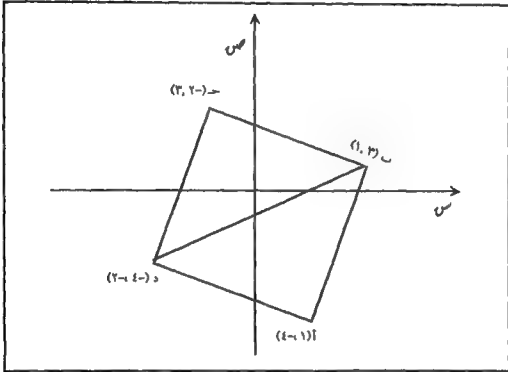


شكل (١-١١)

مثال (١-٢) :

أثبت أن النقط أ (١، ٣)، ب (٣، ٢)، ج (١، ٤)، د (٢، ٤) هي رؤوس مربع وأوجد مساحة المنطقة المربعة أ ب ج د

الحل :



شكل (١-٢)

$$|أ ب|^2 = 4 + 25 = 29 = 2(1-3)^2 + 2(3-1)^2 = 29$$

$$|أ ب|^2 = 4 + 25 = 2(1-2)^2 + 2(2-3)^2 = 29$$

$$|أ ب|^2 = 4 + 25 = 2(3-2)^2 + 2(2-4)^2 = 29$$

$$|أ ب|^2 = 4 + 25 = 2(1-4)^2 + 2(4-2)^2 = 29$$

$$|أ ب| = |أ ج| = |أ د| = |أ ب|$$

الأضلاع الأربعة متساوية في الطول

∴ الشكل إما مربع أو معين

$$\text{ولكن } |ب د| = \sqrt{(4+3)} + \sqrt{(2+1)} =$$

$$= \sqrt{49} + \sqrt{9} =$$

$$= 58$$

$$|ب د| + |أ ب| + |أ د| = \sqrt{49} + \sqrt{9} =$$

$$= 58$$

$$\therefore |ب د| + |أ ب| + |أ د| = \sqrt{49} + \sqrt{9} = 58$$

∴ قائمة

∴ الشكل أ ب ح د مربع

$$\text{وتكون مساحة المنطقة المربعة} = \sqrt{49} \times \sqrt{49} =$$

$$= 29 \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٣-١) :

أ هي النقطة (١، ٢) ، ب هي النقطة (٥، -١) ، ح تقسم أ ب من الداخل بنسبة ١ : ٣ أوجد بعد النقطة ح عن نقطة الأصل .

الحل : (احداثيات ح) :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 2 \\ & \nearrow & \searrow \\ 3 & + & 1 \end{array} \quad \text{ص :}$$

$$\frac{2 \times 3 + 0 \times 1}{3 + 1} = \text{ص}$$

$$\frac{11}{4} = \frac{6 + 0}{4} =$$

$$\begin{array}{ccc} 1- & & 1 \\ & \nearrow & \searrow \\ 3 & + & 1 \end{array} \quad \text{س :}$$

$$\frac{1 \times 3 + 1 - \times 1}{3 + 1} = \text{س}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3 + 1 -}{4} =$$

$$\therefore \text{ح} \equiv \left( \frac{11}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

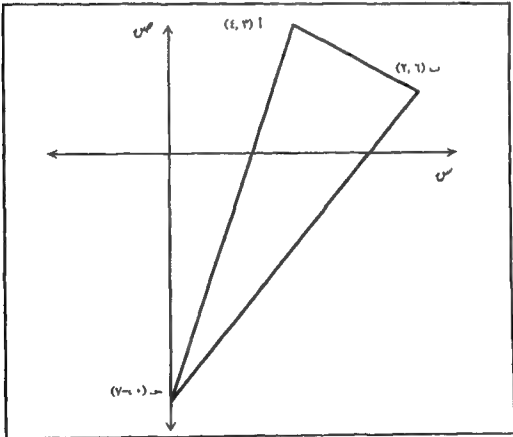
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{121}{16} + \frac{4}{16}} &= \sqrt{\frac{121}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{121}{16} + \frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{125}{16}} = \frac{\sqrt{125}}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

وحدة طول

مثال (٤-١) :

أثبت أن المثلث الذي رؤوسه  $A(4, 3)$  ،  $B(2, 6)$  ،  $C(-7, 0)$  قائم الزاوية ثم أوجد مساحة المنطقة المثلثية  $ABC$  .

الحل :



شكل (١-١٣)

$$١٣ = ٢(٢-٤) + ٢(٦-٤) = ٢ | أ ب |$$

$$١١٧ = ٢(٢-٧-) + ٢(٦-٠) = ٢ | ب ح |$$

$$١٣٠ = ٢(٧+٤) + ٢(٠-٣) = ٢ | أ ح |$$

$$١٣٠ = ١١٧ + ١٣ = ٢ | ب ح | + ٢ | أ ب |$$

$$\therefore | أ ح | = | أ ب | + | ب ح |$$

∴ المثلث قائم الزاوية في ب

(انظر الشكل (١٣-١))

مساحة المنطقة المثلثة أ ب ح

$$= \frac{1}{2} | أ ب | \times | ب ح |$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{13} \sqrt{117}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{13 \times 117} = \frac{1}{2} \sqrt{1521}$$

$$= \frac{39}{2} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٥-١) :

أ ب ح مثلث رؤوسه هي النقاط أ (٤ ، ٢) ، ب (٣ ، ١-) ، ح (٧ ، ٢)  
أوجد مساحة المنطقة المثلثية أ ب ح .

الحل :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٢- \\ ١ & ٣ & ١- \\ ١ & ٧ & ٢ \end{vmatrix} \quad \text{مساحة المنطقة المثلثية} = \frac{1}{2}$$

$$|[(1 \times 3 - 1 \times 4) 2 + (1 \times 4 - 1 \times 7) 1 - (1 \times 7 - 1 \times 3) 2 -] | \frac{1}{4} =$$

$$|[(3-4)2 + (4-7) 1 - (7-3) 2 -] | \frac{1}{4} =$$

$$|[1 \times 2 + (3 \times 1) - (4 - \times 2 -)] | \frac{1}{4} =$$

$$|2+3-8 | \frac{1}{4} =$$

$$وحدة مربعة \quad 3 \frac{1}{4} = (7) \quad \frac{1}{4} =$$

مثال (١-٦) :

أثبت أن النقط الثلاث أ (٣-، ٤-)، ب (٦، ٨)، ونقطة الأصل و تقع على استقامة واحدة .

شرط وقوع النقط الثلاث على إستقامة واحدة هو  $\Delta = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4- & 3- \\ 1 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$3- + (1 \times (4-) - 1 \times 0) 6 + (1 \times 0 - 1 \times 8) 3- =$$

$$= 3- + 4 - 24 = 4 \times 6 + 8 \times 3- =$$

∴ النقط الثلاثة أ، ب، و تقع على استقامة واحدة .

\*\*\*

## تمارين (١-١)

- (١) أوجد طول المستقيم المتوسط المار بالنقطة أ للمثلث الذي رؤوسه هي أ (٢-، ٦)، ب (١-، ٦)، ح (٥، ٠) .
- (٢) مربع طول ضلعه ٥ سم ورؤوسه الأربعة تقع على محاور الإحداثيات أوجد إحداثيات هذه الرؤوس .
- (٣) أ ب ح مثلث متساوي الأضلاع فإذا كانت النقطة أ (ل، ٠)، ب (-ل، ٠)، فأوجد إحداثيات الرأس الثالث ح .
- (٤) أ ب ح د متوازي أضلاع رؤوسه الثلاثة الأولى هي على الترتيب (١، ٥-)، (٢-، ٣)، (١، ٢) أوجد إحداثيات الرأس الرابع .
- (٥) أوجد مساحة المثلث أ ب ح الذي رؤوسه أ (-٣، ١)، ب (-١، ٣)، ح (٣، ٥) .
- (٦) اثبت أن النقط الثلاث أ (-٢، ٢)، ب (١، ٢)، ح (٦، ٤) تقع على استقامة واحدة .
- (٧) أ ب ح مثلث بحيث أ (-١، ٢)، ب (٣، ٥)، ح (١، ٢-) أوجد إحداثيات نقطة تلاقي المستقيمتين المتوسط للمثلث أ ب ح .
- (٨) أ ب ح د متوازي أضلاع رؤوسه هي على الترتيب (ك، ١-)، (٢، ل)، (٥، ٤)، (٣، ٢-) أوجد قيمة كل من ل، ك ثم أوجد مساحة المنطقة أ ب ح د .

\*\*\*

### (١-٤) التمثيل البياني للمعادلة والمحل الهندسي:

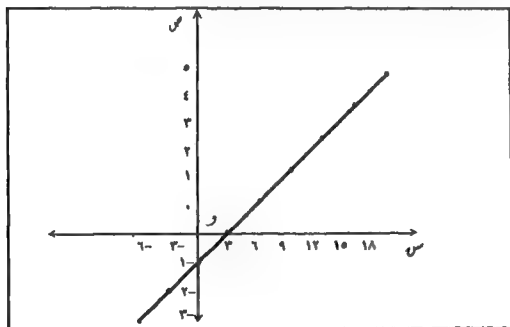
(١) إذا علمت معادلة منحنى ما مثل  $ص = 1 - \frac{1}{3}س$  فإن من السهولة أن نحصل على مجموعة من الأزواج المرتبة (س، ص) بحيث يحقق كل منها المعادلة (١) ويتم ذلك باختيار قيم مناسبة ل س وباستخدام المعادلة يمكننا الحصول على القيم المناظرة ل ص .

فمثلاً باختيار  $س = ١٥$

فإن  $ص = 1 - \frac{1}{3} \times ١٥ = ٠$  وعليه فإن (٤، ١٥) تمثل إحدى الأزواج المرتبة التي تحقق المعادلة (١) ويتكرر العمل يمكننا الحصول على مجموعة مناسبة من الأزواج المرتبة وكتابتها في صورة جدول كالتالي :

|   |                          |    |    |   |   |   |    |    |    |
|---|--------------------------|----|----|---|---|---|----|----|----|
| س | ٦-                       | ٣- | ٠  | ٣ | ٦ | ٩ | ١٢ | ١٥ | ١٨ |
| ص | $٣ - (١ - \frac{1}{3}س)$ | ٢- | ١- | ٠ | ١ | ٢ | ٣  | ٤  | ٥  |

ثم يمكننا بعد ذلك تمثيل كل زوج مرتب من الأزواج المرتبة التي حصلنا عليها بنقطة في مستوى الإحداثيات وتوصيل هذه النقاط فإننا نحصل على التمثيل البياني للمعادلة ونطلق عليه منحنى المعادلة . أنظر شكل (١-٤)



شكل (١-٤)



تعريف :

التمثيل البياني لأي معادلة هو مجموعة جميع النقاط (س ، ص) التي تقع في المستوى الإحداثي وتحقق هذه المعادلة .  
كما يقال إن المعادلة في (س ، ص) تمثل منحنى ما إذا كانت تتحقق بإحداثي أي نقطة تقع على هذا المنحنى .

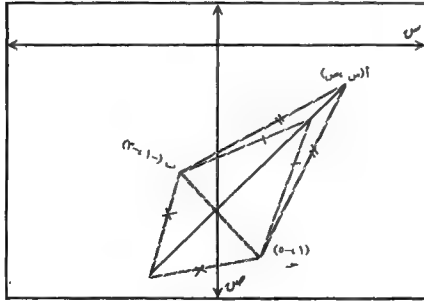
تعريف :

إن أي معادلة في الصورة د (س ، ص) تصف مجموعة من النقاط هي المحل الهندسي لجميع تلك النقاط فعلى سبيل المثال إذا كان المحل الهندسي منحنيا فإنه يجب على كل نقطة في المنحنى أن تحقق معادلته وأيضا يجب على كل نقطة تحقق المعادلة أن تقع على المنحنى .

مثال (١-٧) :

أوجد المحل الهندسي لنقط تتحرك بحيث تكون دائما على بعدين متساويين من النقطتين ب (١-، ٣-) ، ج (١-، ٥-) .

الحل :



شكل (١-١٥)

### خطوات الحل :

(١) نفرض النقطة  $A \equiv (س, ص)$  تحقق الشرط

(٢) نكتب الشرط هندسياً  $|A - B| = |A - C|$

(٣) نترجم الشرط الهندسي إلى علاقة جبرية فباستخدام قانون البُعد

$$\sqrt{(س-٣)^2 + (ص-١)^2} = \sqrt{(س-٥)^2 + (ص-١)^2}$$

$$\Leftrightarrow س^2 - ٦س + ٩ + ص^2 - ٢ص + ١ = س^2 - ١٠س + ٢٥ + ص^2 - ٢ص + ١$$

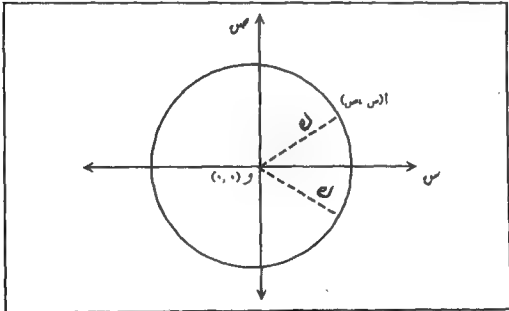
$$\Leftrightarrow ٤س - ٤ص - ١٦ = ٠$$

$$\Leftrightarrow س - ص - ٤ = ٠$$

وهذه هي معادلة المحل الهندسي المطلوب

مثال (١-٨) :

أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون على بعد ثابت قدرة ك من نقطة الأصل .



شكل (١-١٦)

نتبع نفس الخطوات كما في المثال السابق كما يلي :

نفرض أن النقطة المتحركة أ  $\equiv$  (س ، ص)

$$|OA| = ك$$

$$ك = \sqrt{(س - ٠)^2 + (ص - ٠)^2}$$

$$ك^2 = ص^2 + س^2$$

وهذه هي معادلة المحل الهندسي للنقطة وستعرف عليها فيما بعد (تمثل دائرة مركزها ونصف قطرها ك) .

\*\*\*

## تمارين (١-٢)

(١) إرسم منحنى كلاهما يأتي :

$$\begin{aligned} \text{أ - ص} &= \text{س}^2 \\ \text{ب - ص} &= \text{س}^3 \\ \text{ج - ص} &= \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 25 \\ \text{د - ص} &= \text{س} \end{aligned}$$

(٢) إذا كانت النقط (١، ٥)، (٣، ١١) تقع على المنحنى الذي معادلته  $\text{ص} = \text{أ} \text{س} + \text{ب}$  فأوجد كلا من الثابتين أ، ب .

(٣) إذا مر المنحنى  $\text{ص} = \text{أ} \text{س}^2 + \text{ب} \text{س} + \text{ج}$  بالنقط الثلاث (١، ٠)، (٢، ٠)، (٣، ٢) فأوجد قيمة كلا من أ، ب، ج .

(٤) أوجد المحل الهندسي في (أبسط صورة) لكل مما يأتي :

أ - النقطة - متساوية البعد عن النقطتين (٢، ٥)، (٤، ٣)

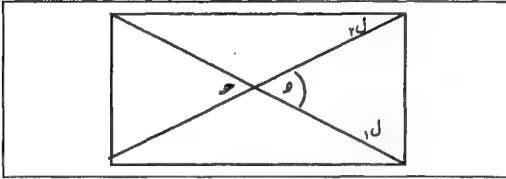
ب - النقطة - تبعد ٧ وحدات عن النقطة (١، ٢)

ج - النقطة - تبعد عن النقطة (٢، ٠) بعداً يساوي ضعف بعدها عن النقطة (٣، -٢)

\*\*\*

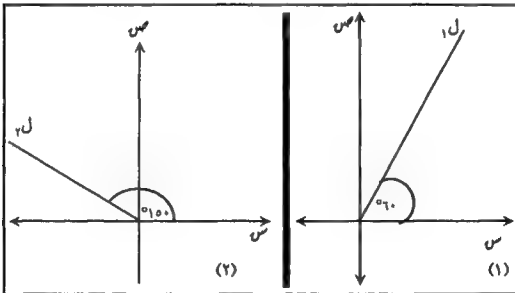
## (٥-١) ميل الخط المستقيم :

تقديم : الزاوية من مستقيم لآخر :



شكل (١- ١٧)

إذا كان لدينا مستقيمان  $ل$  و  $ل٢$  كما في شكل (١٧-١) بحيث  $ل \cap ل٢ = ح$  فإذا دار  $ل$  في إتجاه مضاد لعقاب الساعة إلى أن ينطبق على  $ل٢$  فإن الزاوية الموجبة التي دارها تسمى الزاوية من المستقيم  $ل$  إلى المستقيم  $ل٢$  فإذا رمزنا لهذه الزاوية بالرمز  $\theta$  فإنه من الواضح أن  $\theta$  تنحصر بين  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  أي أن  $0 \leq \theta \leq 180$  :  
زاوية ميل الخط المستقيم :



شكل (١- ١٨)

## تعريف :

زاوية ميل خط مستقيم هي الزاوية المرسومة من محور السينات إلى الخط المستقيم . ففي الشكل (١-١٨) زاوية الميل للمستقيمين ل<sub>١</sub> ، ل<sub>٢</sub> هما ٥٠° ، ١٥٠°

ويمكننا أن نصف المستقيم ل<sub>١</sub> بالقول أنه صاعداً .

كما يمكننا وصف المستقيم ل<sub>٢</sub> بالقول أنه هابطاً .

وعلى ذلك فإن المستقيم يكون صاعداً إذا كانت زاوية ميله تنحصر بين ٥٠° ، ٩٠°

ويكون المستقيم هابطاً إذا كانت زاوية ميله محصور بين ٩٠° ، ١٨٠° .

لكنه باستطاعتنا قياس معدل صعود المستقيم أو هبوطه عن طريق دراسة ما

يسمى بميل الخط المستقيم .

فإذا اخترنا نقطتين أ (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) ، ب (س<sub>٢</sub> ، ص<sub>٢</sub>) على المستقيم ل (بحيث لا

يكون ل رأسياً) .

ونفرض أن س<sub>٢</sub> < س<sub>١</sub> فإن

الفرق بين الإحداثيين السينيين  $\Delta س = س_٢ - س_١$

الفرق بين الإحداثيين الصاديين  $\Delta ص = ص_٢ - ص_١$

(فإذا كانت  $\Delta ص$  سالبة بالطبع يكون المستقيم هابطاً سنعطي مثالاً توضيحياً

فيما بعد) .

ونقيس النسبة  $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$  المعدل الذي يتغير به الإحداثي الصادي بالنسبة لتغير

الإحداثي السيني وهذه النسبة تمكننا من الحكم على المستقيم صاعداً كان أم هابطاً .

فإذا اخذنا في اعتبارنا مستقيماً يمر بالنقطتين أ (٤ ، ٥) ، ب (٣ ، ٣) فإن :

$$\Delta ص = ٣ - ٥ = -٢$$

$$\Delta س = ٣ - ٤ = -١$$

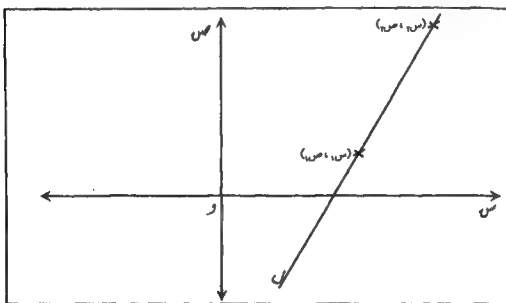
أي أنه عندما تتحرك النقطة على ل من ب إلى أ فإنها ترتفع رأسياً بمقدار وحدتين لكل وحدة من وحدات التغير في المسافة الأفقية ويكون :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = 2 \text{ مقياساً لانحدار الخط المستقيم ل}$$

ونسسمي هذا المعدل  $\left( \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \right)$  بميل الخط المستقيم .

وبالطبع يتضح لنا أننا سنحصل على نفس النتيجة إذا قيست النسبة بين المتغيرين الرأسي والأفقي عندما تتحرك النقطة من أي نقطة على المستقيم إلى النقطة الأخرى .

وهذا يعني أن هذا المقياس ثابت للخط المستقيم الواحد ولا يتغير بتغير النقطتين المختاريتين .



شكل (١ - ١٩)

تعريف :

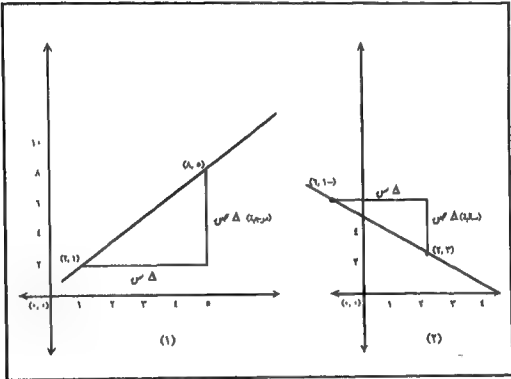
إذا كان ل مستقيماً لا يوازي محور الصادات\* وكانت  $(س١، ص١)$  ،  $(س٢، ص٢)$  أي نقطتين على الخط المستقيم ل

\* (جميع المستقيمات الموازية لمحور الصادات ليس لها ميل حيث  $\Delta \text{س} = 0$ )

$$\frac{\text{ص} ٢ - \text{ص} ١}{\text{س} ٢ - \text{س} ١} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{ميل المستقيم ل}$$

ولزيادة في الإيضاح نورد المثال التالي :

إوجد ميل كلا من المستقيمين في الشكلين الآتيين :



شكل (١ - ٢٠)

في الشكل الأول المستقيم يمر بالنقطتين  $(٨, ٥)$ ،  $(٢, ١)$

$$\frac{٢ - ٨}{١ - ٥} = \frac{\text{ص} ٢ - \text{ص} ١}{\text{س} ٢ - \text{س} ١} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = ١٢ \therefore$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٤}$$



في الشكل الثاني المستقيم يمر بالنقطتين  $(-1, 6)$ ،  $(3, 2)$

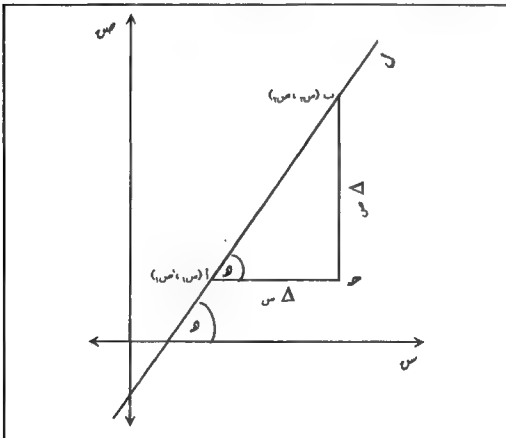
$$\frac{2-6}{(3)-(-1)} = \frac{ص_2-ص_1}{س_2-س_1} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٢ \therefore$$

$$١ - = \frac{٤-}{٤} =$$

نستنتج أنه إذا كان الميل موجب فإن المستقيم يكون صاعداً  $(١-٢٠)$

أنه إذا كان الميل سالب فإن المستقيم يكون هابطاً  $(١-٢٠)$

(١-٦) العلاقة بين ميل الخط المستقيم وزاوية ميله :



شكل (١-٢١)

بالنظر إلى الرسم الموضح في شكل (١ - ٢١)

نلاحظ أنه في المثلث ب أ ح

ب أ ح = هـ زاوية ميل المستقيم ل

$$\therefore \text{ط ا هـ} = \text{ط ا ب أ ح} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{م}$$

ومن ذلك نستنتج أنه :

إذا كان ميل المستقيم م وزاوية ميله هـ

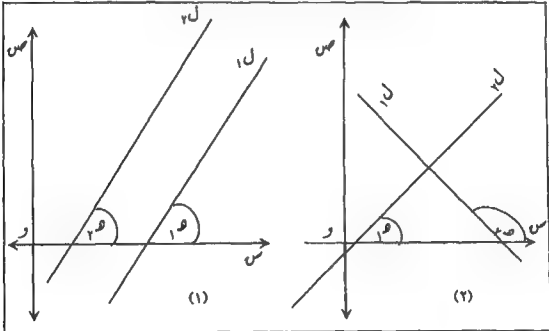
$$\text{فإن م} = \text{ط ا هـ}$$

(٧ - ١) العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين وميلي المستقيمين المتعامدين :

نظرية :

(١) إذا كان ل<sub>١</sub> ، ل<sub>٢</sub> ، مستقيمين متوازيين فإن ميلاهما متساويان .

(٢) إذا كان ل<sub>١</sub> ، ل<sub>٢</sub> مستقيمين متعامدين فإن حاصل ضرب ميليها = -١



شكل (١ - ٢٢)

البرهان :

(١) ل<sub>١</sub> // ل<sub>٢</sub> شكل (١-٢٢) (١)

ليكن ه<sub>١</sub> ، ه<sub>٢</sub> هما قياسا زاويتي ميل ل<sub>١</sub> ، ل<sub>٢</sub> على الترتيب من توازي المستقيمين

$$ه_١ = ه_٢ \quad \text{من توازي المستقيمين}$$

$$طا ه_١ = طا ه_٢$$

$$١٢ = ٢٢$$

أما إذا اعتبرنا أن ه<sub>١</sub> = ه<sub>٢</sub> فإن

$$طا ه_١ = طا ه_٢$$

$$ه_١ = ه_٢ \quad \therefore \text{ل}_١ // \text{ل}_٢$$

وتكون العبارة التالية صحيحة :

«يكون المستقيمان ل<sub>١</sub> ، ل<sub>٢</sub> متوازيين إذا وإذا فقط كان ميلهما متساويين»

(٢) انظر الرسم شكل (١-٢٢) (٢)

في حالة تعامد المستقيمان ل<sub>١</sub> ، ل<sub>٢</sub> فإن :

$$ه_١ = ٩٠ + ه_٢$$

$$طا ه_١ = طا (٩٠ + ه_٢)$$

$$طا ه_١ - = طا ه_٢$$

$$\frac{١}{طا ه_١} - = \frac{١}{طا ه_٢}$$

$$\frac{١}{٢٢} - = \frac{١}{١٢}$$

$$١ - = ٢٢ ١٢$$

وأيضاً إذا كان  $m_1 = -1$

$$\frac{1}{m_1} = 1$$

$$\frac{1}{m_1} = m_1$$

$$m_1 = -m_1$$

$$m_1 = m_1 + 90^\circ$$

$$m_1 = 90^\circ + m_1$$

ل  $m_1$  عمودي على  $m_2$

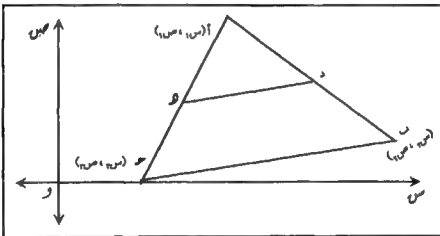
وتكون العبارة التالية صحيحة :

«يكون المستقيمان  $l_1$  ،  $l_2$  متعامدين إذا- وإذا فقط- كان حاصل ضرب ميليهما  $= -1$ » .

مثال (١-١٩) :

في أي مثلث  $ABC$  أثبت تحليلياً أن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي الضلعين  $AB$  ،  $AC$  توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه

الحل :



شكل (١-٢٣)

نفرض أن المثلث أ ب ح رؤسه على الترتيب

أ (ص<sub>1</sub>، ص<sub>2</sub>)، ب (ص<sub>3</sub>، ص<sub>4</sub>)، ح (ص<sub>5</sub>، ص<sub>6</sub>)

، د منتصف أ ب ، هـ منتصف ب ح

والمطلوب إثبات أن : د هـ // ب ح

$$|د هـ| = \frac{1}{2} |ب ح|$$

$$\therefore \text{د منتصف أ ب} \therefore د \equiv \left( \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_3}{2}, \frac{\text{ص}_2 + \text{ص}_4}{2} \right)$$

$$\therefore \text{هـ منتصف ب ح} \therefore هـ \equiv \left( \frac{\text{ص}_3 + \text{ص}_5}{2}, \frac{\text{ص}_4 + \text{ص}_6}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{ميل المستقيم د هـ} &= \frac{\frac{\text{ص}_4 + \text{ص}_6}{2} - \frac{\text{ص}_2 + \text{ص}_4}{2}}{\frac{\text{ص}_5 + \text{ص}_3}{2} - \frac{\text{ص}_3 + \text{ص}_1}{2}} \\ &= \frac{\text{ص}_4 + \text{ص}_6 - \text{ص}_2 - \text{ص}_4}{\text{ص}_5 + \text{ص}_3 - \text{ص}_3 - \text{ص}_1} \\ &= \frac{\text{ص}_6 - \text{ص}_2}{\text{ص}_5 - \text{ص}_1} = \text{ميل المستقيم ب ح} \end{aligned}$$

وهو المطلوب (١)

$\therefore$  د هـ // ب ح

وباستخدام قانون البعد :

$$\begin{aligned} |د هـ| &= \sqrt{\left( \frac{\text{ص}_4 + \text{ص}_6}{2} - \frac{\text{ص}_2 + \text{ص}_4}{2} \right)^2 + \left( \frac{\text{ص}_5 + \text{ص}_3}{2} - \frac{\text{ص}_3 + \text{ص}_1}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\text{ص}_6^2 - 2\text{ص}_2\text{ص}_6 + \text{ص}_2^2}{4} + \frac{\text{ص}_5^2 - 2\text{ص}_1\text{ص}_5 + \text{ص}_1^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\text{ص}_6^2 - 2\text{ص}_2\text{ص}_6 + \text{ص}_2^2 + \text{ص}_5^2 - 2\text{ص}_1\text{ص}_5 + \text{ص}_1^2}{4}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{{}^2(ص_2 - ص_3) + {}^2(ص_1 - ص_3)} \sqrt{\frac{1}{4}} =$$

$$\frac{1}{4} = \text{أ ب ح ا وهو المطلوب (2)}$$

مثال (٢٠-١) :

باستخدام الميل برهن على أن النقط الثلاث أ (٣، ٢) ، ب (-١، ٠) ، ح (٤، ٥) تقع على مستقيم واحد .

الحل :

$$\text{ميل أ ب} \leftrightarrow \text{ميل أ ح} = \frac{3-0}{3-(-1)} = \frac{3-5}{2-4} = 1$$

$$\text{ميل ب ح} \leftrightarrow \text{ميل ب ح} = \frac{0-5}{-1-4} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\therefore \text{ميل أ ب} \leftrightarrow \text{ميل ب ح} \leftrightarrow$$

$$\text{أ ب} \leftrightarrow \text{ب ح} //$$

$$\text{ولكن أ ب} \leftrightarrow \text{ب ح} \cap \{ \text{ب} \}$$

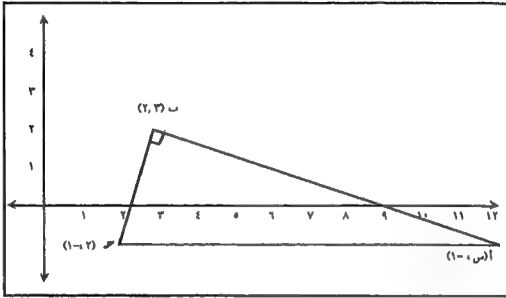
اذن أ ب ، ب ح هما مستقيم واحد .

أي أن أ ، ب ، ح على إستقامة واحدة .

\*\*\*

مثال (٢١-١) :

أب ح مثلث رؤوسه (س، ١-)، (٢، ٣)، (٢، ١-) على الترتيب .  
أوجد قيمة س التي تجعل المثلث أب ح قائم الزاوية في ب .



شكل (١- ٢٤)

الحل :

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{AB} = \frac{٣}{٣-س} = \frac{١+٢}{س-٣}$$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{BC} = \frac{٣}{٢-٣} = \frac{١+٢}{٢-٣}$$

بما أن المثلث قائم الزاوية في ب

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

اذن ميل أب × ميل ب ح = -١

$$١- = ٣ \times \frac{٣}{س-٣}$$

$$1 - = \frac{9}{3-3}$$

$$3-3 = 9$$

$$12 = 3$$

بالنظر إلى تمثيل المثلث في الشكل رقم (١ - ٢٤)  
نتحقق من صحة إجابتنا .

\*\*\*



### تمارين (١-٣)

(١) أي من ثلاثيات النقط الآتية تكون رؤوس مثلث قائم الزاوية

(أ)  $(٠, ٧)$  ،  $(٣, ٥)$  ،  $(٠, ٠)$

(ب)  $(٥, ٧)$  ،  $(٣, -١)$  ،  $(١, -١)$

(ج)  $(٢, -٤)$  ،  $(١, ٦)$  ،  $(٥, -٠)$

(٢) أ، ب، جـ هي النقط (ك، -١)، (٥، ٢)، (-٤، ٢) على الترتيب فإذا كان

المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب أوجد قيمة ك .

(٣) أثبت باستخدام الميل أن النقط الثلاث

(ك، ك+٣) ، (٣، ٢-٣ن) ، (هـ، ٢-هـ)

تقع جميعا على مستقيم واحد لجميع قيم ك، ن، هـ الحقيقية .

\*\*\*

## (٨-١) الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم :

سنستمر في دراسة المستقيمات ومحاولة الحصول على صور قياسية لمعادلات الخط المستقيم باستخدام معلومات كالميل أو نقط على المستقيم وعلى أنه يجب علينا أن نتذكر التعريف الذي وضعناه لمعادلة المنحنى سابقاً . الذي ينص على أن المعادلة (س ، ص) تمثل منحن ما إذا كانت تتحقق بإحداثي أي نقطة تقع على هذا المنحنى .

وبناء على ذلك فإننا نستطيع وبسهولة الحصول على معادلة المستقيم في بعض حالاته الخاصة نورد هنا فيما يلي :

١- المستقيم ل يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ب) . ففي هذه الحال فإن الأحداثي السيني لأي نقطة تقع على الخط المستقيم هو مقدار ثابت = أ وعلى ذلك فإننا نقبل الصورة س = أ كمعادلة لهذا المستقيم لأنها تتحقق بإحداثي أي نقطة تقع على المستقيم .

٢- المستقيم ل يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (أ ، ب) بنفس الطريقة فإننا نقبل الصورة ص = ب معادلة للمستقيم ل حيث تتحقق لجميع نقط المستقيم .

٣- بالنظر إلى محور الإحداثيات : نجد أن أي نقطة على محور السينات يكون الإحداثي الصادي لها = صفراً .

وعلى ذلك فإن معادله محور السينات هي ص = ٠

وأيضاً نجد أن الإحداثي السيني لأي نقطة على محور الصادات يساوي صفراً .

وعلى ذلك فإن معادلة محور الصادات هي س = ٠

وكتطبيق على ما سبق فإن معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر

س = ١

بالنقط ( ١ ، ٢) هي

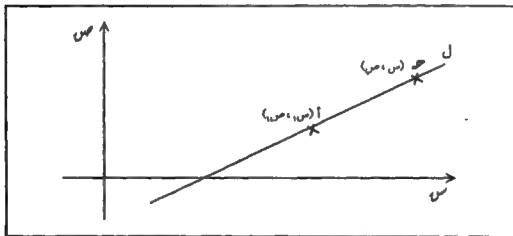
ومعادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة ( ١ ، -٢ ) هي :

$$ص = -٢$$

والآن نعود لتعيين معادلة الخط المستقيم والذي لا يكون في حالة خاصة كموازية أحد المحاور أو يقع على المحاور نفسها .

والحالة الأولى التي سنعرض لها هي :

معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة عليه :



شكل ( ١ - ٢٥ )

فإذا كان ميل الخط المستقيم  $ل = م$

والنقطة المعلومه هي  $أ \equiv (س١، ص١)$

فإذا فرضنا أي نقطة من نقاط المستقيم ولتكن  $ح \equiv (س، ص)$

فباستخدام إحداثيات النقطتين  $أ، ح$

$$فإن م = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص - ص١}{س - س١}$$

والصورة السابقة هي علاقة بين  $س، ص$  (إحداثيات أي نقطة تقع على الخط

المستقيم  $ل$ ) بدلالة  $م، س١، ص١$  لكنها رغم ذلك لا تصلح لكونها صورة معادلة

مستقيم لأننا لو عوضنا بالنقطة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) في هذه الصورة فإن الطرف الأيسر  
ينعدم فيه كلا من البسط والمقام مما يجعله ليس ذو معنى .

$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \text{م}$$

فإذا عوضنا عن س = س<sub>١</sub> ، ص = ص<sub>١</sub> فإن المعادلة تتحقق وعلى ذلك فإن صورة  
معادلة المستقيم ل بمعلومية الميل م والنقطة (س<sub>١</sub> - ص<sub>١</sub>) هي :

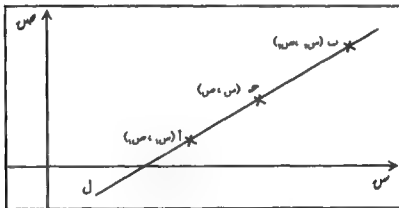
$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1)$$

ويمكن وصف المستقيم ل عن طريقها كما يلي :

$$\text{ل} = \{ (\text{س} ، \text{ص}) : \text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1) \}$$

الحالة الثانية :

«معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه»



شكل (١ - ٢٦)

نفرض أن المستقيم ل يمر بالنقطتين أ (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) ، ب (س<sub>٢</sub> ، ص<sub>٢</sub>)

ونفرض النقطة حـ (س ، ص) أي نقطة على ل

فإن خاصية الاستقامة تعني تحليلياً أننا لو حسبنا الميل من أي نقطتين على المستقيم فإننا نحصل على نفس النتيجة مهما كانت النقطتان المختارتان

( وهو ما سبق وعبرنا عنه بأن ميل المستقيم دائماً مقدار ثابت )

وعلى ذلك فباستخدام إحداثيات أ ، ب

$$(1) \quad m = \frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2}$$

باستخدام إحداثيات أ ، ب

$$(2) \quad m = \frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2}$$

من (1) ، (2)

$$\frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2} = \frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2}$$

$$(ص_1 - ص_2)(س_1 - س_2) = (ص_1 - ص_2)(س_1 - س_2)$$

وهي علاقة بين س ، ص إحداثياً أي نقطة على المستقيم بدلالة إحداثيات نقطتين عليه .

ويمكن وصف المستقيم ل عن طريق هذه المعادلة كما يلي :

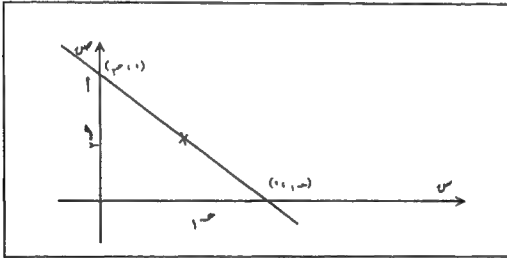
$$ل = \{ (س ، ص) : (ص_1 - ص_2)(س_1 - س_2) = (ص_1 - ص_2)(س_1 - س_2) \}$$

### الحالة الثالثة :

معادل الخط المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من محور الصادات قبل أن نبدأ في إستنتاج هذه الصورة يجب أن نوضح ما هو المقصود بالجزء المقطوع من أحد المحورين بالمستقيم ل .

#### تعريف :

إذا قطع المستقيم ل محور السينات في النقطة  $(\text{ح} , ٠)$  فإن  $\text{ح}$  هي طول الجزء المقطوع من محور السينات بالمستقيم ل وأيضاً إذا قطع المستقيم ل محور الصادات في النقطة  $(٠ , \text{ح})$  . فإن  $\text{ح}$  هي طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم ل وشكل (١-٢٧) يوضح  $\text{ح} , \text{ح}$



شكل (١ - ٢٧)

والآن نعود لتعيين معادلة المستقيم ل والذي يقطع من محور الصادات جزءاً قدره  $\text{ح}$  مع العلم بأن ميل المستقيم ل معلوماً ويساوي م .

بما أن المستقيم يقطع من محور الصادات جزءاً قدره  $\text{ح}$

اذن النقطة  $(٠ , \text{ح})$  تقع على المستقيم وميله = م

معادلة ل هي ص - ح = م (م - ٠) (من الحالة الأولى)

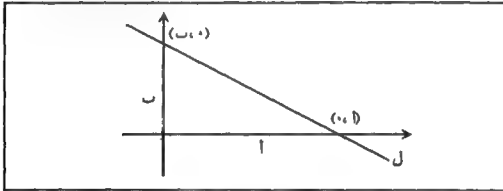
$$\text{ص} = \text{م} + \text{ح}$$

ووصف المستقيم ل عن طريق هذه المعادلة

$$\text{هول} = \{(\text{م}, \text{ص}) : \text{ص} = \text{م} + \text{ح}\}$$

الحالة الرابعة :

معادلة المستقيم بمعلومية الجزئين المقطوعين من محوري الأحداثيات بالمستقيم



شكل (١ - ٢٨)

نفرض أن المستقيم ل يقطع من المحورين جزئين طوليهما أ، ب على الترتيب

من تعريف الجزء المقطوع نجد أن المستقيم يمر بالنقطتين (٠، ب)، (أ، ٠)

ويتطبيق صورة معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه

$$\frac{\text{ص} - \text{ب}}{\text{م} - ٠} = \frac{\text{ص} - ٠}{\text{م} - \text{أ}}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \frac{\text{ص} - \text{ب}}{\text{أ} - \text{ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}}$$

$$١ = \frac{\text{ص}}{\text{ب}} + \frac{\text{ص}}{\text{أ}}$$

وهذه صورة المعادلة المطلوبة

أما وصف ل بهذه الصورة فهو :

$$L = \{(s, v) : \frac{v}{u} + \frac{s}{1} = 1\}$$

(تسمى هذه الصورة بصورة المقطعين أيضاً)

نظرية (١-٢) :

المعادلة العامة من الدرجة الأولى في  $s, v$

على الصورة  $As + Bv + C = 0$  تمثل دائماً خطاً مستقيماً (أ، ب،  $C \neq 0$  معا)

البرهان :

إذا كانت  $B = 0$  تصبح المعادلة

$$As + C = 0$$

$s = \frac{-C}{A}$  وهي معادلة مستقيم // محور الصادات

وإذا كانت  $A = 0$  تصبح المعادلة

$$Bv + C = 0$$

$v = \frac{-C}{B}$  وهي معادلة مستقيم // محور السينات

أما إذا كانت  $A \neq 0, B \neq 0$  أيضاً

$$\text{فإن } As + Bv + C = 0$$

$$Bv = -As - C$$

$$v = \frac{-As - C}{B} = -\frac{A}{B}s - \frac{C}{B}$$

وهي صورة المعادلة تمثل مستقيماً ميله  $-\frac{A}{B}$



والجزء المقطوع من محور الصادات =  $\frac{ح}{أ}$

فإن المعادلة أ ص + ب ص + ح = ٠

تمثل دائما خطأ مستقيما حيث أ ، ب ≠ ٠ معا .

وهو المطلوب

نتيجة : يمكن استخدام هذه النظرية لتحديد ميل المستقيم والجزء المقطوع من محور الصادات إذا علمت المعادلة

فإذا كانت المعادلة في الصورة العامة أ ص + ب ص + ح = ٠

فإنه يمكن تحويلها إلى صورة الميل والجزء المقطوع فتصبح

$$ص = \frac{أ}{ب} ص - \frac{ح}{ب}$$

$$فيكون الميل م = \frac{أ}{ب} = \frac{-معامل ص}{معامل ص}$$

$$ويكون الجزء المقطوع = \frac{ح}{ب} = \frac{-الحذ المطلق}{معامل ص}$$

فمثلاً إذا كانت معادلة المستقيم في الصورة

$$٣ ص - ٤ ص + ٥ = ٠$$

$$فإن م = \frac{أ}{ب} = \frac{٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$$

$$، الجزء المقطوع = \frac{ح}{ب} = \frac{٥}{-٤} = -\frac{٥}{٤}$$

(١ - ٩) إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمين :

$$\text{ليكن } L_1 = \{(x, y) : x_1 + y_1 + z_1 = 0\}$$

$$L_2 = \{(x, y) : x_2 + y_2 + z_2 = 0\}$$

يتقاطعان في النقطة  $H(x_1, y_1, z_1)$

$$(1) \quad H \in L_1 \therefore x_1 + y_1 + z_1 = 0$$

$$(2) \quad H \in L_2 \therefore x_2 + y_2 + z_2 = 0$$

، (١) ، (٢) معادلتان آتيتان من الدرجة الأولى في  $x_1, y_1, z_1$  بحلها جبرياً

نحصل على كلا من  $x_1, y_1, z_1$  ، وتكون إحداثيات نقطة التقاطع  $H(x_1, y_1, z_1)$

(١ - ١٠) عائلة الخطوط المستقيمة :

$$1 - \text{المعادلة } x + y + z = 0$$

تدل على معادلة مستقيم ميله  $\sqrt{2}$  وطول الجزء المقطوع من محور الصادات  $= \sqrt{2}$

$$\text{والمعادلة } x + y + z = 0$$

هي معادلة مستقيم ميله  $\sqrt{2}$  ويقطع من محور الصادات جزءاً قدره  $\sqrt{2}$  فإذا

سمحنا للرمز  $\lambda$  أن يأخذ قيمة عددية موجبة أو سالبة أو صفراً فإننا نحصل على

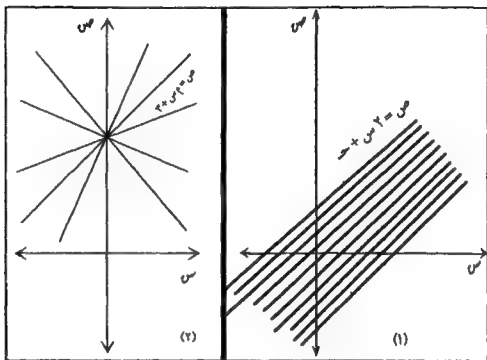
عائلة (مجموعة) من المستقيمات لها نفس الميل  $\sqrt{2}$  أنظر شكل (١ - ٢٩)

بينما المعادلة  $x + y + z = 0$  هي معادلة مستقيم يقطع من محور الصادات جزءاً

طوله  $\sqrt{2}$  فإذا سمحنا للرمز  $\lambda$  أن يأخذ أي قيمة موجبة أو سالبة أو صفراً فإننا نحصل

على عائلة من المستقيمات تقطع من محور الصادات الجزء  $\sqrt{2}$

أنظر شكل (١ - ٢٩)



شكل (١ - ٢٩)

٢- بوجه عام فإن المعادلة  $أ_١س + ب_١ص + حد_١ = ٠$

حيث  $أ_١$ ،  $ب_١$ ،  $حد_١$  أعداداً ثابتة

هي معادلة مستقيم ميله  $-\frac{أ_١}{ب_١}$  ويقطع من محور الصادات جزءاً  $\frac{حد_١}{ب_١}$

ومعادله عائلة (جميع) المستقيمات التي تتفق معه في الميل هي :

$$أ_١س + ب_١ص + حد_١ = ٠$$

حيث حد متغير يأخذ أي قيمة موجبة أو سالبة أو صفراً

$$\text{فمثلاً: } ٣س + ٢ص + ٤ = ٠$$

هي معادلة مستقيم ميله  $-\frac{٣}{٢}$

ومعادلة عائلة المستقيمات التي لها نفس الميل هي :

$$٣-٢ \text{ ص} + \text{ح} = ٠ \quad \text{ح} \text{ متغير يأخذ أي قيمة .}$$

$$٣- \quad \text{المعادلة ص} - \text{ص} = ١ \text{ م} = (١ \text{ ص} - ١) :$$

هي معادلة مستقيم ميله معلوم  $\text{م} = ١$  ويمر بنقطة معينة  $(١ \text{ ص} , ١)$  .

$$\text{وتكون المعادلة ص} - \text{ص} = ١ \text{ م} = (١ \text{ ص} - ١)$$

حيث  $\text{م}$  متغير يأخذ أي قيمة موجبة أو سالبة أو صفراً هي معادلة عائلة المستقيمات التي تمر بالنقطة  $(١ \text{ ص} , ١)$  .

فمثلاً عائلة جميع المستقيمات التي تمر بالنقطة  $(٢ , ٣)$

$$\text{معادلتها هي (ص} - ٣) = \text{م} (٢ - \text{ص})$$

نظرية (١ - ٣) :

وبوجه عام معادلة عائلة المستقيمات التي تمر بنقطة تقاطع المستقيمين .

$$\text{ل} = (١ \text{ ص} , ١) : \text{أ} \text{ ص} + \text{ب} \text{ ص} + \text{ح} = ٠$$

$$\text{ل} = (٢ \text{ ص} , ٢) : \text{أ} \text{ ص} + \text{ب} \text{ ص} + \text{ح} = ٠$$

$$\text{هي (أ} \text{ ص} + \text{ب} \text{ ص} + \text{ح} = ٠) \text{ ك (أ} \text{ ص} + \text{ب} \text{ ص} + \text{ح} = ٠)$$

البرهان :

لتكن  $(١ \text{ ص} , ١)$  هي نقطة تقاطع المستقيمين  $\text{ل} , \text{ل}$

$$\text{أ} \text{ ص} + \text{ب} \text{ ص} + \text{ح} = ٠$$

$$\text{أ} \text{ ص} + \text{ب} \text{ ص} + \text{ح} = ٠$$

وبالتالي فإن :

$$(أ_1 س_1 + ب_1 ص_1 + ح_1) + ك(أ_1 س_1 + ب_1 ص_1 + ح_1) = صفر$$

أي أن  $(س_1, ص_1) \exists$  ل حيث

$$ل = \{(س, ص) : (أ_1 س_1 + ب_1 ص_1 + ح_1) + ك(أ_1 س_1 + ب_1 ص_1 + ح_1) = 0\}$$

فمثلا عائلة المستقيمات التي تمر بنقطة تقاطع المستقيمين

$$ل_1 = \{(س, ص) : 2س + 5ص - 5 = 0\}$$

$$ل_2 = \{(س, ص) : 3س - 2ص - 4 = 0\}$$

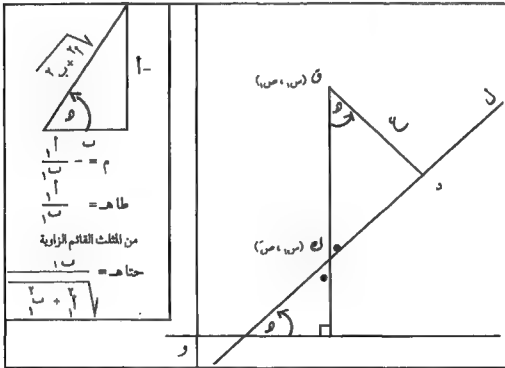
$$ل_3 = \{(س, ص) : (2س + 5ص - 5) + ك(3س - 2ص - 4) = 0\}$$

ويمكن بتحديد أي شرط آخر لتبين قيمة ك وبالتالي تعيين معادلة ل

نظرية (١-٤) :

ايجاد طول العمود الساقط من النقطة  $(س_1, ص_1)$  على المستقيم

$$ل = \{(س, ص) : أ_1 س_1 + ب_1 ص_1 + ح_1 = 0\}$$



شكل (١-٣٠)

المطلوب :

إيجاد طول العمود اق دا

البرهان :

من النقطة ق نسط عمود على محور السينات فيقطع المستقيم المعلوم في ك

اذن  $K \equiv (س_1, ص_1)$

ك تقع على المستقيم ل اذن تحقق معادلته

$$\begin{aligned} 0 &= ا_1 س_1 + ب_1 ص_1 + ج_1 \\ \frac{ا_1 س_1 + ج_1}{ب_1} - ص_1 &= 0 \end{aligned}$$

ولكن اق ك  $= |ا_1 ص_1 - ص_1 ا_1|$

$$= \left| \frac{ا_1 س_1 + ج_1}{ب_1} + ص_1 \right| =$$

$$= \left| \frac{ا_1 س_1 + ب_1 ص_1 + ج_1}{ب_1} \right| =$$

$$\text{من المثلث ق د ك نجد ان } اق ك = \frac{ع}{اق ك} = ح_1$$

اذن  $ع = اق ك ح_1$

$$= \left| \frac{ا_1 س_1 + ب_1 ص_1 + ج_1}{ب_1} \times \frac{ب_1}{\sqrt{ا_1^2 + ب_1^2}} \right| =$$

$$\text{اذن } ع = \frac{ا_1 س_1 + ب_1 ص_1 + ج_1}{\sqrt{ا_1^2 + ب_1^2}}$$

وهو المطلوب

# (١١ - ١) المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية والخط المستقيم :

الصورة العامة للمعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية هي

$$أس^٢ + ٢ ح ص + ب ص^٢ = ٠$$

$$٠ = (أس + ح ص) - ٢(ح - ٢ أب) ص^٢$$

ومنها فإن المعادلة تمثل مستقيمين :

$$ل١ = \{ (س، ص) : أس + ح ص + \sqrt{٢(أب - ح^٢)} ص = ٠ \}$$

$$ل٢ = \{ (س، ص) : أس + ح ص - \sqrt{٢(أب - ح^٢)} ص = ٠ \}$$

ويكون المستقيمان ل١، ل٢ حقيقيين إذا - فقط إذا - كان  $ح^٢ < أب$

ويكون المستقيمان ل١، ل٢ منطقيين إذا - فقط إذا - كان  $ح^٢ = أب$

ولن نتعرض هنا للحالة التي فيها  $ح^٢ > أب$

وإذا كان  $٠ =$  مثلاً فإن المعادلة تصبح

$$٢ ح ص + ب ص^٢ = ٠$$

$$\text{معادلة الأول} \quad ص = ٠$$

$$\text{، معادلة الثاني} \quad ٢ ح ص + ب ص = ٠$$

نتيجة (١) : الشرط اللازم لتمثل المعادلة :

$$أس^٢ + ٢ ح ص + ب ص^٢ = ٠ \quad ق س + ٢ ف ص + ح = ٠$$

خطين مستقيمين

البرهان : من المعادلة فإن :

$$ب ص + ٢(ح س + ف ص) + (أ س^٢ + ٢ ق س + ح) = ٠ \quad (١)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في ص يمكن استخدام قانون حل معادلات

الدرجة الثانية في إيجاد مجموعة الحل لها .

$$\frac{-(2\text{هـ} + \text{س} + \text{ف}) \pm \sqrt{4(\text{هـ} + \text{س} + \text{ف})^2 - 4(\text{ك}(\text{أ} + \text{ق} + \text{س} + \text{ح}))}}{2} = \text{أي ص}$$

هـ س + ب ص + ف =  $\pm \sqrt{4(\text{أ} - \text{ب})^2 + 2(\text{هـ} - \text{ق}) + (\text{ف} - \text{ب} - \text{ق})}$   
 فلكي تمثل المعادلة خطين مستقيمين فلا بد أن يكون المقدار الموجود تحت الجذر مريعا كاملا والشرط اللازم لذلك أن يكون مميزه = 0  
 (ملاحظة : المقدار الموجود تحت الجذر هو مقدار ثلاثي من الدرجة الثانية في س) بوضع مميز المقدار تحت الجذر = 0

$$\begin{aligned} \text{اذن } (\text{هـ}^2 - \text{أ}^2)(\text{ب} - \text{ق}) - (\text{هـ} - \text{ق})(\text{هـ} - \text{ب}) &= 0 \\ \text{هـ}^2 \text{ق} - \text{هـ}^2 \text{ب} - \text{أ}^2 \text{ق} + \text{أ}^2 \text{ب} - \text{هـ}^2 \text{ق} + \text{هـ}^2 \text{ب} + \text{أ}^2 \text{ق} - \text{أ}^2 \text{ب} &= 0 \\ \text{ب}^2 \text{ق}^2 = 0 & \text{ بالقسمة على ب حيث ب } \neq 0 \text{ نحصل على } \\ \text{أ}^2 \text{ب} - \text{أ}^2 \text{ق} - \text{هـ}^2 \text{ق} + \text{هـ}^2 \text{ب} &= 0 \\ (\text{أ}^2 \text{ب} - \text{هـ}^2 \text{ق}) - (\text{هـ} - \text{ق})(\text{هـ} - \text{ب}) &= 0 \end{aligned}$$

ويمكن كتاب هذا الشرط على هيئة محدد في الصورة

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{هـ} & \text{ق} \\ \text{هـ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{ق} & \text{ف} & \text{ح} \end{vmatrix} = 0$$

وعناصر هذا المحدد تمثل مصفوفة متماثلة .

وإذا اعتبرنا  $\text{أ} = \text{ب} = \text{ق}$  تصبح المعادلة (1) هي :

$$2\text{هـ} + \text{س} + \text{ق} + \text{ف} + \text{ص} + \text{ح} = 0$$

بالقسمة على 2





الحل :

من معادلة المستقيم

$$3 \text{ ص} - 2 = 4 - \text{م}$$

$$\text{ص} = \frac{2-}{3} - \frac{4}{3}$$

$$\text{م} = \frac{2-}{3} - \frac{4-}{3}$$

مثال (١-٢٤) :

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٢) وعمودي على المستقيم { (م، ص) : ٣ م - ٢ ص + ٥ = ٠ }

الحل :

$$\text{ميل المستقيم المعلوم} = \frac{3-}{2-} = \frac{3}{2}$$

نفرض أن ميل المستقيم المطلوب = م

بما أن المستقيمان متعامدان

$$1 = \text{م} \times \frac{3}{2}$$

$$1 = \frac{3}{2} \times \text{م}$$

$$\frac{2-}{3-} = \text{م}$$

اذن معادلة المستقيم المطلوب هي

$$\text{ص} + 2 = \frac{2-}{3} \cdot (3 - \text{م})$$

$$3 \text{ ص} + 6 = 2 - \text{م}$$

$$٠ = ٤ + ص٢ + ص٣$$

وهي المعادلة المطلوبة

مثال (١-٢٥) :

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة  $(-٢, ١)$  ويوازي المستقيم الذي معادلته

$$٠ = ٤ + ص٣ + ص٢$$

الحل :

$$\text{ليكن } ل_١ = \{ (ص, ص) : ٠ = ٤ + ص٣ + ص٢ \}$$

$$\text{ميل المستقيم } ل_١ = -\frac{٢}{٣}$$

بما أن المستقيم المطلوب // ل<sub>١</sub>

$$\text{اذن ميل المستقيم المطلوب} = -\frac{٢}{٣}$$

$$\text{وبالتالي فإن معادلته هي } (ص-١) = -\frac{٢}{٣}(ص+٢)$$

$$٣ ص - ٣ = -٢ ص - ٤$$

$$٠ = ١ + ص٣ + ص٢$$

وهي المعادلة المطلوبة

مثال (١-٢٦) :

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

$$٢ ص + ٥ ص = ١١ , ٣ ص - ص = ٩$$

$$\text{ويوازي المستقيم } ٢ ص - ص = ٥$$

الحل :

نوجد أولاً نقطة تقاطع المستقيمين

$$٢ \text{ ص} + ٥ \text{ ص} = ١١, \quad (١)$$

$$٣ \text{ ص} - \text{ص} = ٩ - \quad (٢)$$

من المعادلة الأولى وضرب المعادلة الثانية في ٥

$$\begin{array}{l} \text{بالجمع} \left\{ \begin{array}{l} ٢ \text{ ص} + ٥ \text{ ص} = ١١ \\ ١٥ \text{ ص} - ٥ \text{ ص} = -٤٥ \\ \hline ١٧ \text{ ص} = -٣٤ \\ \hline \text{ص} = -٢ \end{array} \right. \end{array}$$

بالتعويض في (٢)

$$٩ - \text{ص} = ٣ \times -٢ - \text{ص}$$

$$\text{اذن } -\text{ص} = ٣ -$$

$$\text{ص} = ٣$$

اذن نقطة التقاطع هي  $(٣, -٢)$

نوجد ثانياً ميل المستقيم

$$\text{ميل الموازي} = \frac{-٢}{١} = ٢$$

اذن ميل المستقيم  $= ٢$  أيضاً

وبالتالي فإن معادلة المستقيم المطلوبة هي :

$$\text{ص} - ٣ = ٢ + (\text{س})$$

$$\text{ص} - ٣ = ٢ + \text{س}$$

$$\text{ص} - ٢ = ٧ - \text{س}$$

وهي المعادلة المطلوبة

حل آخر :

يمكن حل هذا المثال باستخدام المعادلة العامة لعائلة المستقيمات كما يلي :

المعادلة العامة لعائلة المستقيمات التي تمر بنقطة تقاطع المستقيمين

$$ل_١ = \{ (\text{س} , \text{ص}) : ٢ \text{س} + ٥ \text{ص} = ١ \}$$

$$ل_٢ = \{ (\text{س} , \text{ص}) : ٣ \text{س} + \text{ص} = -٩ \}$$

$$(١) \quad \text{هي} \quad ٢ \text{س} + ٥ \text{ص} - ١١ + \text{ك} (٣ \text{س} - \text{ص} + ٩) = ٠$$

بما ان المستقيم المطلوب يوازي المستقيم ٢ س - ص = ٥

$$(٢) \quad \text{اذن ميل المستقيم المطلوب م} = \frac{٢-}{١-} = ٢$$

$$\text{من (١)} \quad (٢ + ٣ \text{ك}) \text{س} + (٥ - \text{ك}) \text{ص} + (٩ - \text{ك} - ١١) = ٠$$

$$(٣) \quad \therefore \text{م} = \frac{-(٢+٣\text{ك})}{٥-\text{ك}}$$

من (٢) ، (٣) نجد ان

$$٢ = \frac{-(٢+٣\text{ك})}{٥-\text{ك}}$$

$$-٢ - ٢٣ = ١٠ - ٢ \text{ك}$$

$$-١٢ = \text{ك}$$

$$\text{ك} = -١٢$$

اذن معادلة المستقيم المطلوب هي :

$$٢ + ٥ ص - ١١ - ١٢ (٣ ص + ٩) = ٠$$

$$٢ + ٥ ص - ١١ - ٣٦ + ١٢ ص - ١٠٨ = ٠$$

$$- ٣٤ ص + ١٧ ص = ١١٩$$

$$ص - ٢ = ٧$$

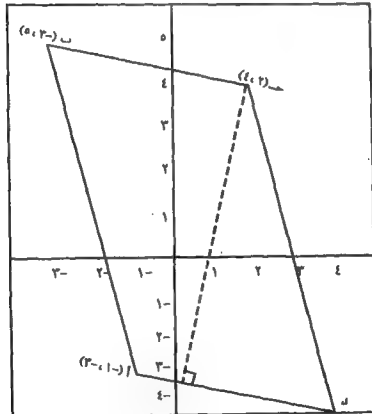
هي المعادل المطلوبة

مثال (١-٢٧) :

أ ب ح د متوازي أضلاع إحداثيات رؤوسه الثلاثة أ ، ب ، ح هي

على الترتيب (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٣- ، ١- ) .

أوجد إحداثيات الرأس الرابع ثم أوجد مساحته .



شكل (١-٣٠)

لتعيين إحداثيات د

$$\text{س} = 3 - 2 + 1 = 2$$

$$\text{ص} = 3 - 2 + 1 = 2$$

$$\text{اذن د} \equiv (2, 2)$$

وليجاد مساحة متوازي الأضلاع نوجد معادلة أ د

$$\frac{3 + 2}{1 + 2} = \frac{2 + 2}{1 + 2}$$

$$5 + 2 = 5 + 2$$

$$5 = 5$$

ويكون ارتفاع متوازي الأضلاع «ع» هو طول العمود الساقط

من النقطة ح (2, 2) على المستقيم أ د .

$$\sqrt{(3 + 2)^2 + (1 + 2)^2} = \text{طول القاعدة أ د}$$

$$\sqrt{26} = \sqrt{1 + 25}$$

$$\frac{|16 + 2 + 2 \times 5|}{\sqrt{25 + 1}} = \text{ارتفاع متوازي الأضلاع}$$

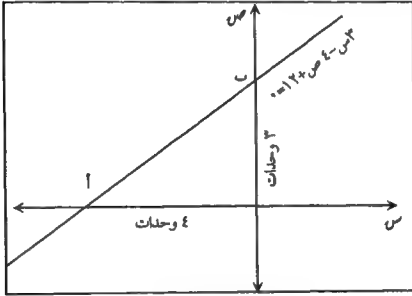
$$\frac{38}{\sqrt{26}} =$$

$$\frac{38}{\sqrt{26}} \times \sqrt{26} = \text{اذن مساحة متوازي الأضلاع}$$

$$38 = \text{وحدة مربعة}$$

مثال (١-٢٨) :

المستقيم ل = (ص، ص) : ٣ ص - ٤ ص + ١٢ = ٠  
 يقطع المحورين في النقطتين أ، ب أوجد :  
 (١) إحداثيا كلا من أ، ب (٢) مساحة القطعة المثلثية أ و ب



شكل (١-٣١)

بوضع معادلة المستقيم على صورة المقطعين كما يلي :

$$٣ ص - ٤ ص + ١٢ = ٠$$

بالقسمة على ١٢

$$١ = \frac{٣ ص}{١٢} - \frac{٤ ص}{١٢} + \frac{١٢}{١٢}$$

$$١ = \frac{ص}{٤} - \frac{ص}{٣} + ١$$

اذن المستقيم يقطع من الجزء السالب لمحور السينات طولاً قدره ٤ وحدات  
 ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات طولاً قدره ٣ وحدات

كما في الشكل (١-٣١)

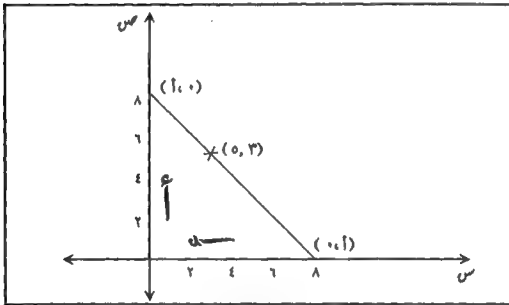


$$\text{اذن } أ \equiv (٠, ٤) , ب \equiv (٣, ٠)$$

$$٤ \text{ مساحة المثلث } أوب = ٤ \times ٣ \times \frac{١}{٢} = ٦ \text{ وحدات مربعة .}$$

مثال (١- ٢٩) :

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٥) ويقطع من المحورين جزأين متساويين .



شكل (١- ٣٢)

نفرض أن المستقيم ل يقطع من المحورين جزأين متساويين طول كلا منهما أ من الوحدات الطولية .

معادلة ل على صورة المقطعين هي :

$$١ = \frac{ص}{أ} + \frac{س}{أ}$$

$$س + ص = أ$$

بما أن النقطة (٣، ٥) تقع على ل اذن تحقق معادلته .

$$I = 5 + 3$$

$$A = I$$

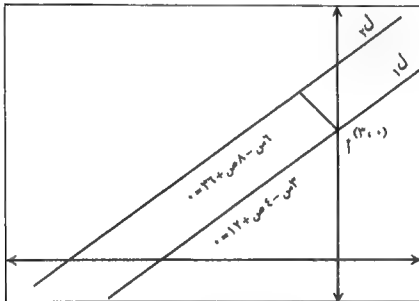
اذن  $L = \{(S, I) : S + I = 8, I = 5 + 3\}$   
 مثال (١ - ٣) :

أوجد البعد بين المستقيمين

$$L_1 = \{(S, I) : S - 3I = 12, I = 4 + 12\}$$

$$L_2 = \{(S, I) : S - 6I = 36, I = 8 + 36\}$$

الحل :



شكل (١ - ٣٤)

بوضع  $S = 0$  (أي قيمة اختيارية مناسبة) في معادلة  $L_1$

$$اذن \quad 4 = 12 \Leftrightarrow S = 3$$

$$اذن \quad (3, 0) \in L_1$$

اذن النقطة أ  $\equiv (3, 0)$

ثم نوجد طول العمود الساقط من أ على ل، فيكون هو البعد المطلوب

$$\text{البعد المطلوب} = \frac{|3 \times 6 + 8 \times 3 - 0 \times 6|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{42}{10} = 4.2$$

$\therefore 4.2$  وحدة طول

\*\*\*

## تمارين (١-٤)

(١) أوجد معادلات المستقيمات التي تحقق الشروط التالية :

(أ) الميل = ١ - ويمر بالنقطة (-٣ ، ٣)

(ب) الميل = ٢ والجزء المقطوع من محور الصادات = ٥

(ج) يمر بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (-٥ ، ٣)

(د) طول الجزئين المقطوعين من محوري الإحداثيات هما على الترتيب ٢ ، ٤

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١ ، ٢) إذا كان

(أ) يوازي المستقيم ٣س - ٢ص + ٥ = ٠

(ب) عمودي على المستقيم ٢ص - ٣س + ٧ = ٠

(٣) أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم ٢س - ٦ص - ٠ =

ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين ٣-١-٠ ، ٤س - ١٨ + ٠ =

(٤) أوجد قيمة ك التي تجعل المستقيم ل = ١ = { (س ، ص) : ٢س + ٣ص + ٠ = ٢ }

عمودياً على المستقيم ل = ٢ = { (س ، ص) : ص = كس + ٥ }

ثم أوجد نقطة تقاطع ل<sub>١</sub> ، ل<sub>٢</sub>

(٥) أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين

٢ص + س + ٤ = ٠ ، ٢ص + س + ١٢ = ٠

(٦) أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه هي النقط (٢ ، ٢) ، (٤ ، -٦) ، (٦ ، ٥)

(٧) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٣) ويقطع من المحورين جزئين النسبة بينهما ٣ : ٢

(٨) ل هو المستقيم { (س ، ص) : ص - ٣ = ٤س + ٢٤ = ٠ } فإذا قطع المحورين في النقطتين أ ، ب وكانت ح هي النقطة (-٢ ، ٥) فأوجد مساحة الشكل أ و ح ب (و هي نقطة الأصل) .

(٩) المستقيم ٣س + ص = ١٢ يقطع المحورين في النقطتين أ ، ب على الترتيب ، والمستقيم ٦س + ٥ص = ٣٠ يقطع المحورين في النقطتين ح ، د على الترتيب .

أوجد إحداثيات النقط الأربع أ ، ب ، ح ، د ثم أوجد مساحة الشكل الرباعي الذي رؤوسه هذه النقط .

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) ويكون مع محوري الإحداثيات مثلثا مساحته ٨ وحدات مربعة .

(١١) اكتب معادلة عائلة المستقيمات التي تحقق الشروط المعطاة :

( أ ) موازية للمستقيم الذي معادلته ٣س + ٢ص + ٤ = ٠

(ب) عمودية على المستقيم الذي معادلته س - ٢ص + ٣ = ٠

(ح) تقطع من محور الصادات جزءاً قدره -٤

( د ) تقطع من محور السينات جزءاً قدره -٣

(هـ) يمر بالنقطة (٣ ، -٢)

(١٢) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (١ ، ١) وينقطة تقاطع

المستقيمين ل<sub>١</sub> = { (س ، ص) : ص + ٢س - ٣ = ٠ }

ل<sub>٢</sub> = { (س ، ص) : ص + ٤س - ٧ = ٠ }

(١٣) أوجد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون على بعدين متساويين

من النقطتين أ (٢ ، ٥) ، ب (٤ ، ٣)

واثبت تحليلياً أنها تمثل خطاً مستقيماً عمودياً على  $\overleftrightarrow{AB}$  من منتصفه .

(١٤) أ ب ، ب ح مستقيمان متقاطعان في ب فإذا كانت معادلتيهما

$$4x + 3y = 7, \quad 3x - 4y = 5 \text{ على الترتيب .}$$

فأوجد معادلة المستقيم المنصف للزاوية أ ب ح

(إرشاد : منتصف  $\widehat{A}$  ب ح هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث بعدها العمودي عن

المستقيم الأول أ ب = بعدها العمودي عن المستقيم الثاني ب ح)

\*\*\*

## الباب الثاني

### الدائرة

(١-٢) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها  $n$  .

(٢-٢) معادلة الدائرة بمعلومية مركزها ونصف قطرها .

(٣-٢) الصورة العامة لمعادلة الدائرة .

(٤-٢) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة اذا علمت معادلتها .

(٥-٢) معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها .

تمارين (١-٢)

(٦-٢) العلاقة بين المستقيم والدائرة .

(٧-٢) العلاقة بين الدائرة ومحوري الإحداثيات .

(٨-٢) طول المماس المرسوم من نقطة معلومة للدائرة .

(٩-٢) معادلة المماس للدائرة عند نقطة معلومة .

تمارين (٢-٢)

(١٠-٢) معادلة المماسين المرسومين من نقطة معلومة للدائرة .

(١١-٢) معادلة وتر التماس لنقطة معلومة بالنسبة للدائرة .

(١٢-٢) معادلة الخط القطبي لنقطة معلومة بالنسبة للدائرة .

(١٣-٢) النقطتان المترافقتان والمثلث المترافق الذاتي بالنسبة للدائرة .

(١٤-٢) معادلة يوخمشتال .

تمارين (٢-٣)

(١٥-٢) العلاقة بين دائرتين .

(١٦-٢) زاوية تقاطع دائرتين .

(١٧-٢) المعادلة العامة لعائلة النواثر التي تمر بنقطة تقاطع دائرتين .

(١٨-٢) نقطة التماس ومعادلة المماس المشترك .

تمارين (٢-٤)

\*\*\*



## الباب الثاني

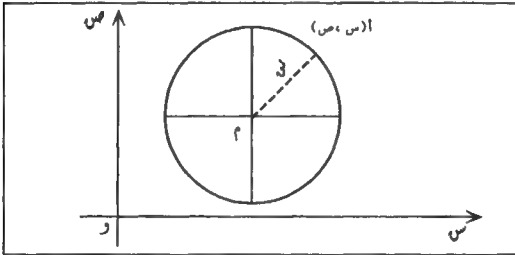
### الدائرة

في الباب الأول أوضحنا كيفية تمثيل معادلة منحنى ما بيانيا وأوضحنا أيضا معنى معادلة المنحني وكيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم في صورته المختلفة .

وفي هذا الباب سنحاول الحصول على الصور المختلفة لمنحنى جديد هو الدائرة لذلك فانه يتوجب علينا في البداية أن نضع تعريفا هندسيا دقيقا للمنحنى ونعنى به هنا الدائرة .

تعريف :

الدائرة هي مجموعة جميع النقاط في المستوى والتي على بعد ثابت من نقطة ثابتة . وتسمى النقطة الثابتة بمركز الدائرة والبعد الثابت بنصف قطر الدائرة .



شكل (١-٢)

وبتعبير آخر :

إذا فرضنا نقطة ثابتة م وتحركت النقطة أ (س, ص) (شكل ١-٢) بحيث تأخذ

أوضاعاً مختلفة شرط أن تكون دائماً وفي جميع أوضاعها على بعد ثابت = نق من النقطة الثابتة م . فإن مجموعة جميع الأوضاع التي تأخذها النقطة أ في المستوى تكون دائرة مركزها م .

(٢-١) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق .

إذا اعتبرنا م هي النقطة (٠، ٠) (نقطة الأصل) ، أ هي النقطة (س، ص) فتكون المسافة |أم| =  $\sqrt{س^2 + ص^2}$  وعلى ذلك فإن النقطة أ تقع على الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها نق إذا وفقط إذا - كان |أم| = نق أي إذا وفقط إذا - كان س، ص يحققان العلاقة .

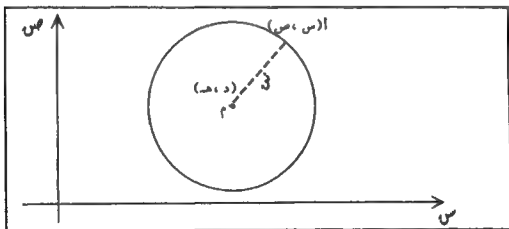
$$\sqrt{س^2 + ص^2} = نق \quad (١)$$

أي إذا وفقط إذا - كان (س، ص) حلاً للمعادلة (١) إذن المعادلة (١) هي معادلة دائرة مركزها (٠، ٠) ونصف قطرها نق ويمكن كتابة (١) في صورة أخرى مكافئة لها .

$$س^2 + ص^2 = نق^2$$

والآن فأننا سنحاول الحصول على معادلة الدائرة بحيث تكون نقطة المركز هي أي نقطة أخرى غير نقطة الأصل كما في المثال السابق .

(٢-٢) معادلة الدائرة بمعلومية مركزها ونصف قطرها :



شكل (٢-٢)

إذا اعتبرنا مركز الدائرة م  $\equiv$  (د ، هـ)

وطول نصف قطر الدائرة = نق

وفرضنا النقطة أ  $\equiv$  (س ، ص) تقع في المستوى (شكل ٢-٢)

$$\text{المسافة أ م} = \sqrt{(س-د)^2 + (ص-هـ)^2}$$

ولكن النقطة أ تقع على الدائرة إذا - فقط إذا - كان

$$\text{أ م} = \text{نق}$$

أي إذا - فقط إذا - كان (س ، ص) حلاً للمعادلة

$$(٢) \quad \sqrt{(س-د)^2 + (ص-هـ)^2} = \text{نق}$$

وهذه معادلة الدائرة المطلوبة

ولما كان الجذر حقيقي وغير سالب لجميع قيم س ، ص

اذن بتربيع الطرفين نستطيع الحصول على معادلة مكافئة للمعادلة (٢) وتصبح معادلة الدائرة هي

$$(س-د)^2 + (ص-هـ)^2 = \text{نق}^2$$

أي أن الدائرة التي مركزها (د ، هـ) ونصف قطرها نق هي

$$د = \{ (س، ص) : (س-د)^2 + (ص-هـ)^2 = \text{نق}^2 \}$$

(٢-٣) الصورة العامة لمعادلة الدائرة :

الصورة السابقة التي حصلنا عليها في (٢-١) هي صورة معادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) ونصف قطرها نق وهي :

$$(س-د)^2 + (ص-هـ)^2 = \text{نق}^2$$

$$\begin{aligned} & \Leftarrow \text{س}^2 - \text{د}^2 + \text{س}^2 + \text{د}^2 + \text{ص}^2 - \text{ه}^2 - \text{ز}^2 + \text{ص}^2 - \text{ه}^2 - \text{ز}^2 + \text{نق}^2 = 0 \\ & \Leftarrow \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{د}^2 - \text{س}^2 - \text{ه}^2 + \text{ص}^2 + \text{د}^2 - \text{ه}^2 - \text{ز}^2 + \text{نق}^2 = 0 \\ & \text{وبوضع } -\text{د} = \text{ل} , -\text{ه} = \text{ك} , \text{د}^2 + \text{ه}^2 - \text{ز}^2 + \text{نق}^2 = \text{ح} \end{aligned}$$

تصبح المعادلة في الصورة

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ل}^2 + \text{ك}^2 + \text{ح} = 0 \quad (٣)$$

وتسمى المعادلة (٣) بالصورة العامة لمعادلة الدائرة ويقال أن الدائرة د في صورتها العامة إذا كتبت كما يلي :

$$\text{د} = \{ (\text{س} , \text{ص}) : \text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ل}^2 + \text{ك}^2 + \text{ح} = 0 \}$$

وإذا ضربت المعادلة (٣) في أ (أي ثابت إختياري) تصبح

$$\text{أ} \text{س}^2 + \text{أ} \text{ص}^2 + \text{أ} \text{ل}^2 + \text{أ} \text{ك}^2 + \text{أ} \text{ح} = 0$$

ويتضح من ذلك أن :

أي معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص تكون معادلة دائرة إذا توافر شرطان

$$١ - \text{أن يكون معامل س}^2 = \text{معامل ص}^2$$

$$٢ - \text{أن تكون خالية من الحد الذي يحتوى على س ص أي أن معامل س ص} = \text{صفر}$$

فمثلا المعادلة :

$$٧ \text{س}^2 + ٧ \text{ص}^2 - ٨ \text{س} - ١٠ \text{ص} + ٢٥ = 0$$

هي معادلة دائرة بالطبع لانها معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص وأيضا فإنها تحقق الشرطان السابقان .

(٢-٤) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة إذا علمت معادلتها

إذا فرضنا معادلة منحن ما في الصورة

$$٤ \text{ س}^٢ + ٤ \text{ ص}^٢ - ٤٨ \text{ س} - ٦٤ \text{ ص} + ٧٦ = ٠ \quad (٤)$$

نلاحظ أن :

$$(١) \text{ معامل س}^٢ = \text{معامل ص}^٢ = ٤$$

(٢) خالية من الحد الذي يحتوى على س ص

إذن المعادلة تمثل دائرة

ولتعيين مركزها ونصف قطرها فإننا نحاول باستخدام مفاهيم الجبر أن نصل بها إلى صورة الدائرة بمعلومية المركز ونصف القطر والتي سبق دراستها وهي :

$$(س-د)^٢ + (ص-هـ)^٢ = \text{نق كما يلي} :$$

من (١) وبالقسم على ٤

$$س^٢ - ١٢ س + ص^٢ - ١٦ ص + ١٩ = ٠$$

وباستخدام إكمال المربع تصبح :

$$س^٢ - ١٢ س + (٣٦ - ٣٦) + ص^٢ - ١٦ ص + (٦٤ - ٦٤) + ١٩ = ٠$$

$$(س^٢ - ١٢ س + ٣٦) + (ص^٢ - ١٦ ص + ٦٤) + (١٩ - ٣٦ - ٦٤) = ٠$$

$$(س-٦)^٢ + (ص-٨)^٢ - ٨١ = ٠$$

$$(س-٦)^٢ + (ص-٨)^٢ = ٨١$$

وهذه معادلة دائرة مركزها (٦ ، ٨)

ونصف قطرها = ٩ وحلات

ولكننا لسنا بحاجة في كل مرة أن نكمل المربع ونسير على نفس الخطوات السابقة حيث إن من السهولة بمكان أن نحصل على المركز ونصف القطر بالاستفادة بالمعادلة العامة للدائرة في الصورة س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> + ٢ل س + ٢ك ص + ح = ٠

(لاحظ أن معامل س = ٢ = معامل ص = الوحدة)

$$\text{إذن ل} = -\text{د} ، \text{ك} = -\text{هـ}$$

$$\Leftrightarrow \text{د} = -\text{ل} ، \text{هـ} = -\text{ك}$$

$$\text{إذن مركز الدائرة م} \equiv (\text{د} ، \text{هـ})$$

$$\text{أي أن م} \equiv (-\text{ل} ، -\text{ك})$$

$$\text{إذن م} \equiv \left(-\frac{1}{4} \text{ معامل س} ، -\frac{1}{4} \text{ معامل ص}\right)$$

ومن العلاقة :

$$\text{د}^٢ + \text{هـ}^٢ - \text{نق}^٢ = \text{ح}$$

$$\text{إذن ل}^٢ - \text{ك}^٢ - \text{نق}^٢ = \text{ح}$$

$$\Leftrightarrow \text{نق}^٢ = \text{ل}^٢ + \text{ك}^٢ - \text{ح}$$

$$\Leftrightarrow \text{نق} = \sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ك}^٢ - \text{ح}}$$

وعلى ذلك يكون الطريق الأسهل لحل المثال الذي عرضناه سابقا والمطلوب فيه تعيين مركز ونصف قطر الدائرة .

$$٤ \text{ س}^٢ + ٤ \text{ ص}^٢ - ٨ \text{ س} - ٦٤ \text{ ص} + ٧٦ = ٠$$

بالقسمة على ٤

$$\text{تصبح المعادلة س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٢ \text{ س} - ١٦ \text{ ص} + ١٩ = ٠$$

ومنها مباشرة المركز  $\equiv (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$  معامل  $\text{ش} = -\frac{1}{4}$  معامل  $\text{ص} =$

اذن المركز  $\equiv (6, 8)$

ونصف القطر  $\text{ش} = \sqrt{ل^2 + ك^2 - ح}$

$$= \sqrt{19 - 64 + 36}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

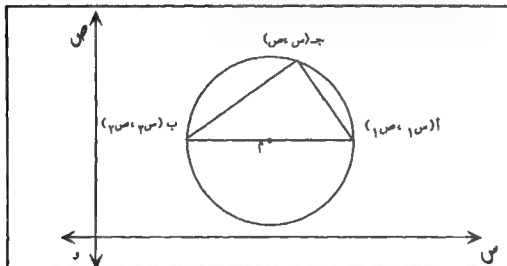
ملاحظات : (١) اذا كان  $ل^2 + ك^2 - ح = 0$

فإن  $\text{ش} = 0$  وتكون الدائرة نقطة واحدة

(٢) اذا كان  $ل^2 + ك^2 - ح > 0$  (سالب)

فإن  $\text{ش} = 2$  سالب وتكون الدائرة تخيلية

٢ - ٥ معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها :



شكل (٢-٣)

ليكن  $أ$   $ب$  قطري الدائرة د ،

$$أ \equiv (س_1, ص_1) \quad ، \quad ب \equiv (س_2, ص_2)$$

ونفرض النقطة ح على الدائرة بحيث  $\widehat{ح} \equiv (س، ص)$

بما أن أ ب قطر في الدائرة فإننا نعلم من سابق دراستنا في الهندسة أن زاوية أ ب ح = قائمة (مرسومة في نصف دائرة)

$$\begin{aligned} \widehat{أ ب ح} &= \text{قائمة} \\ \Leftrightarrow \widehat{أ ح} &\perp \widehat{ب ح} \\ \Leftrightarrow \text{ميل } \widehat{أ ح} &\times \text{ميل } \widehat{ب ح} = -1 \\ \Leftrightarrow \text{ميل } \widehat{أ ح} &= \frac{ص - ص_1}{ص_2 - ص} \times \frac{ص - ص_2}{ص_1 - ص} \\ \Leftrightarrow (ص - ص_1)(ص - ص_2) &= -(ص - ص_1)(ص - ص_2) \\ \Leftrightarrow (ص - ص_1)(ص - ص_2) &+ (ص - ص_1)(ص - ص_2) = 0 \end{aligned}$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في س، ص تتحقق لكل (س، ص) تقع على الدائرة وتحقق الشرطين المطلوبين .

إذن هي معادلة الدائرة المطلوبة ويمكن كتابة د كما يلي :

$$د = \{ (س، ص) : (ص - ص_1)(ص - ص_2) + (ص - ص_1)(ص - ص_2) = 0 \}$$

مثال (١-٢) :

أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة أ (٣، ٨) ضعف المسافة بينها وبين النقطة ح (١، ١) . ماذا يمثل ؟

الحل :

نفرض النقطة ب (س، ص) تحقق الشرط المطلوب



$$| \text{اذن} | \text{ب} | \text{أ} | = | \text{ب} | \text{ح} |$$

$$| \text{ب} | \text{أ} | \text{ب} | \text{ح} | = \text{ب} | \text{ح} |$$

$$[(\text{ص} - 1) + (\text{س} - 1)] \text{ح} = (\text{ص} - 8) + (\text{س} - 3)$$

$$[\text{س} - 1 + \text{س} + 9 + \text{ص} - 16 + \text{ح} = 64 + \text{ح}] \text{ح} = 64 + \text{ح} + 1 + \text{س} - 1 + \text{ص} - 16 + \text{ح} + 1$$

$$[\text{س} - 1 + \text{س} + 9 + \text{ص} - 16 + \text{ح} = 64 + \text{ح}] \text{ح} = 64 + \text{ح} + 1 + \text{س} - 1 + \text{ص} - 16 + \text{ح} + 1$$

$$3 \text{ س} + 2 \text{ ص} - 2 \text{ س} + 8 \text{ ص} - 65 = 0$$

وهذه معادلة دائرة

∴ المحل الهندسي يمثل دائرة

ولايجاد مركز ونصف قطرها

$$\text{بالقسمة علي (3) س} + 2 \text{ ص} - 2 \text{ س} + 8 \text{ ص} - 65 = 0$$

$$\text{اذن المركز م} \equiv \left( \frac{1}{3}, -\frac{4}{3} \right)$$

$$\text{ونصف القطر} = \sqrt{\frac{65}{3} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

مثال (2-2) :

أوجد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها هما النقطتين (1، -1)، (3، 5) .

الحل :

$$D = \{ (س، ص) : (س - 1)(س - 3) + (ص - 1)(ص - 5) = 0 \}$$

$$= \{ (س، ص) : (س - 1)(س - 3) + (ص - 1)(ص - 5) = 0 \}$$

$$\{ (س، ص) : س^2 - 2س - 3 + ص^2 - 2ص - 5 = 0 \}$$

$$\{ (س، ص) : س^2 + 2ص + 2س - 4 - 8 = 0 \}$$

اذن معادلة الدائرة هي

$$س^2 + 2ص + 2س - 4 - 8 = 0$$

مثال (٣-٢) :

اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث (٢، ٠) ، (٢، ٨) ، (٧، ٣)

الحل :

نفرض معادلة الدائرة في الصورة العامة

$$س^2 + ص^2 + ٢س + ٢كص + ح = ٠$$

النقطة (٢، ٠) تقع على الدائرة

$$٠ = ٤ + ٠ + ٢ك + ح$$

$$(١) \quad ٤ - ٢ك - ح = ٠$$

، النقطة (٢، ٨) تقع على الدائرة

$$٠ = ٦٤ + ١٦ + ٤ + ٢ك + ح$$

$$(٢) \quad ٦٨ + ١٦ + ٤ + ٢ك + ح = ٠$$

النقطة (٧، ٣) تقع على الدائرة.

$$٠ = ٩ + ٤٩ + ١٤ + ٢ك + ح$$

$$(٣) \quad ٠ = ٥٨ + ٦ل + ١٤ك + ح$$

ب طرح (١) من (٢)

$$\text{بالقسمة على ٨} \quad ٠ = ٦٤ + ٦ل + ١٨ك$$

$$(٤) \quad ٠ = ٨ + ٦ل + ك$$

ب طرح (١) من (٣)

$$\text{بالقسمة على ٦} \quad ٠ = ٥٤ + ٦ل + ١٨ك$$

$$(٥) \quad ٠ = ٩ + ٦ل + ٢ك$$

ب ضرب (٤)  $\times ٢$  وطرحها من (٥)

$$\text{اذن} \quad ٠ = ٩ + ٦ل + ٢ك$$

$$٠ = ١٦ + ٤ل + ٢ك$$

$$٠ = ٧ - ٣ل$$

$$٧ - = ٣ل$$

$$\frac{٧-}{٣} = ل \quad \Leftrightarrow$$

وبالتعويض في (٥)

$$\frac{٢٠}{٣} - = ٢ك$$

$$\frac{١٠}{٣} - = ك \quad \Leftrightarrow$$

بالتعويض في (١)

$$٠ = ح + \frac{٤٠}{٣} - ٤$$

$$\frac{٢٨}{٣} = ح \quad \Leftrightarrow$$

$$٠ = \frac{٢٨}{٣} + ص - \frac{٢٠}{٣} - ٢ - \frac{١٤}{٣} - ٢ + ص + ٢$$

$$٠ = ٢٨ + ص - ٢٠ - ٤ - ٢ + ص + ٢ \Leftrightarrow$$

مثال (٢-٤) :

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٠، ٦-)، (٠، ٢-)

ويقع مركزها على المستقيم  $ص + ١ = ٠$

**الحل :**

نفرض أن معادلة الدائرة في الصورة العامة

$$٠ = ص + ٢ + ل + ٢ + ص + ٢ + ك + ص + ح = ٠$$

النقطة (٠، ٢-) تقع على الدائرة

$$٠ = ٤ - ٠ + ل + ح = ٠$$

$$\Leftrightarrow ٠ = ٤ - ل + ح = ٠ \quad (١)$$

النقطة (٠، ٦-) تقع على الدائرة

$$٠ = ٣٦ - ١٢ + ل + ح = ٠ \quad (٢)$$

ب طرح (١) من (٢)

$$٠ = ٣٢ - ل$$

$$٣٢ = ل$$

$$\Leftrightarrow ٤ = ل \quad (٣)$$

بالتعويض في (١)

$$٠ = ٤ - ١٦ + ح = ٠$$

$$١٢ = ح \quad (٤)$$

بما ان مركز الدائرة (ل-، ك-) يقع على المستقيم س + ص = ١

$$\text{أي أن ل-ك} = ١ + ٠$$

$$\text{إذن ل-ك} = ١ + ٠$$

$$\Leftrightarrow \text{ك} = ٣ - (٥)$$

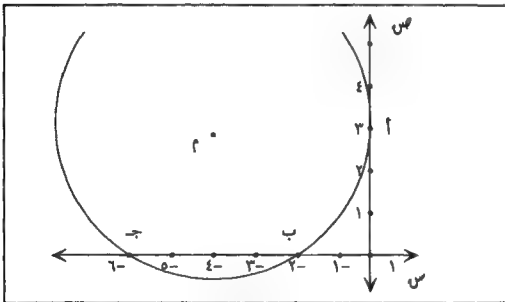
من (٣)، (٤)، (٥) اذن معادلة الدائرة المطلوبة هي :

$$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٢ \times ٤ \text{س} + ٢ + (٣ -) \text{ص} + ١٢ = ٠$$

$$\Leftrightarrow \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٨ \text{س} - ٦ \text{ص} + ١٢ = ٠$$

مثال (٢-٥) :

إذا كان أ ب حدد شكل رباعي رؤوسه على الترتيب (٠، ٢-)، (٣، ٠)، (٠، ٦-)، (٤، ٠) فاثبت أن أ ب حدد رباعي دائري .



شكل (٣-٣)

الحل :

لكن نثبت أن الشكل رباعي دائري لابد أن نثبت أن النقط الأربع أ ، ب ، ح ، د تقع جميعا على محيط دائرة واحدة .

لذلك نوجد معادلة الدائرة بمعلومية أي ثلاث نقط من الرؤوس ونثبت أنها أيضا تمر بالرأس الرابع كما يلي :

نفرض معادلة الدائرة في الصورة العامة

$$x^2 + y^2 + 2ux + 2vy + c = 0$$

النقطة (٠، ٣) تقع على الدائرة

$$0 = 9 + 0 + 0 + 6u + c$$

$$(1) \quad 0 = 9 + 6u + c \quad \Leftrightarrow$$

، النقطة (٠، ٤) تقع على الدائرة

$$0 = 16 + 0 + 0 + 8u + c$$

$$(2) \quad 0 = 16 + 8u + c \quad \Leftrightarrow$$

بطرح (١) من (٢)

$$0 = 7 + 2u$$

$$(3) \quad c = -\frac{7}{2} - u$$

بالتعويض في (١)

$$0 = 9 + 6u + (-\frac{7}{2} - u)$$

$$\Leftrightarrow 0 = -12 + 5u$$

$$\Leftarrow \text{ح} = ١٢ \quad (٤)$$

النقطة  $(٠, ٢-)$  تقع على الدائرة

$$٠ = \text{ح} + ٠ + \text{ل} - ٤$$

$$\Leftarrow \text{ح} = ٤ - \text{ل}$$

بالتعويض عن  $\text{ح} = ١٢$  من (٤)

$$٠ = ١٢ + \text{ل} - ٤$$

$$\text{ل} = ١٦ -$$

$$\Leftarrow \text{ل} = ٤ \quad (٥)$$

من (٣) ، (٤) ، (٥) وبالتعويض في الصورة العامة

اذن معادلة الدائرة هي

$$\text{ص}^٢ + \text{ص}^٢ - ٨\text{ص} - ٧\text{ص} + ١٢ = ٠$$

بالتعويض بالنقطة  $(٠, ٦-)$

$$\text{الطرف الأيمن} = ٣٦ + ٠ + ٨ - (٦-) - ٧ = ١٢ + ٠$$

$$= ٣٦ - ٤٨ + ١٢$$

$$= ٤٨ - ٤٨$$

$$= ٠$$

اذن النقطة  $\text{ح} = (٠, ٦-)$  تحقق معادلة الدائرة

أي أن النقطة  $\text{ح} = (٠, ٦-)$  تقع على الدائرة التي تمر بالنقط أ ، ب ، د

إذن أ ، ب ، ح ، د يمر بها محيط دائرة واحد .

$\Leftarrow$  أ ب ح د شكل رباعي دائري .

## تمارين (٢-١)

- ١- أوجد معادلة الدائرة التي تحقق الشرط  
 ( أ ) مركزها (٣-، ٥) وتمر بنقطة الأصل  
 (ب) مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٢، ٥) .  
 (ج) مركزها النقطة (٤، ٣) وتمر بالنقطة (١، -١) .
- ٢- أوجد معادلة الدائرة التي نهايتها قطر فيها النقطتين (٧، ٢-)، (٤، ٥) .
- ٣- أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث (٤، ٠) ، (٠، ٢) ، ونقطة الأصل .
- ٤- أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث (٠، -٢) ، (٨، ٢) ، (٣، ٧) .
- ٥- أوجد مركز ونصف قطر كل من الدوائر الآتية معادلتها :  
 ( أ )  $١١ = ٢ص + ٢س - ٢ص + ٢س$   
 (ب)  $١٠ = ٢ص + ٢س + ٢ل + ٢س + ٢ك$   
 (ج)  $٩ = ٤ص + ٢س + ٤ص + ٢س + ٤ص + ٩$
- ٦- إذا كانت معادلة الدائرة في الصورة  $٢ص + ٢س + ٢ = ٢$  فبرهن على أن الشرط اللازم لتقع النقطة أ (س، ص) حيث س، ص عددين حقيقيين داخل الدائرة هو  $٢ص + ٢س > ٢$  .
- ماذا يمكنك القول عن وضع النقطة أ (س، ص) إذا كان  $٢ص + ٢س < ٢$  .
- ٧- أ هي النقطة (١-، ٥) ، ب هي النقطة (٢، ٤) فإذا كانت ح نقطة تتحرك بحيث قياس زاوية أ ح ب قائمة أوجد المحل الهندسي للنقطة ح ماذا يمثل ؟
- ٨- أوجد المحل الهندسي للنقطة أ (س، ص) إذا كان مجموع مربعي بعديهما عن النقطتين (٥، ٢) ، (١، ٤) يساوي ٥٢ .  
 وبين نوع المنحنى الناتج .



## (٢-٦) العلاقة بين المستقيم والدائرة

فيما سبق إستطعنا أن نحصل على الصور المختلفة لمعادلة المستقيم ولمعادلة الدائرة والسؤال الذي يطرح نفسه ما هي صور العلاقة بين المستقيم والدائرة؟

إن العلاقة بين المستقيم والدائرة لا تخرج عن صور ثلاث :

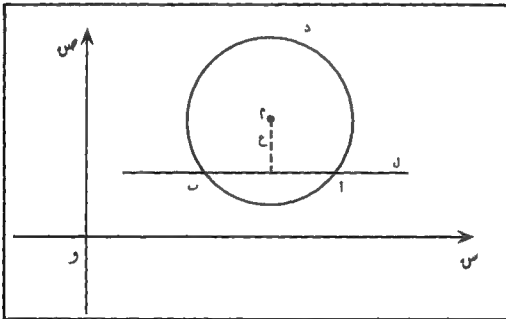
الأولى : أن يقطع المستقيم الدائرة في نقطتين  $\Delta \cap د = \{أ، ب\}$

الثانية : أن يمس المستقيم الدائرة  $\Delta \cap د = \{أ\}$

الثالثة : أن يتباعد المستقيم والدائرة  $\Delta \cap د = \emptyset$

ولمزيد من التوضيح والتفصيل نحاول دراسة كل صوره على حده ونفضل أن نبدأ بدراسة هندسية ثم ننتقل إلى الدراسة الجبرية .

الصورة الأولى : المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين



شكل (٢-٤)

بالنظر إلى شكل (٢-٤) : المستقيم ل يقطع الدائرة د في النقطتين أ ، ب

ع هو طول العمود الساقط من مركز الدائرة د على المستقيم ل

نلاحظ في هذه الصورة ( صورة التقاطع في نقطتين) أن

طول هذا العمود > نق

فإذا فرضنا أن ل = { (س ، ص) : ص = م س + ح -

، د = { (س ، ص) : س = ص + نق = نق } ،

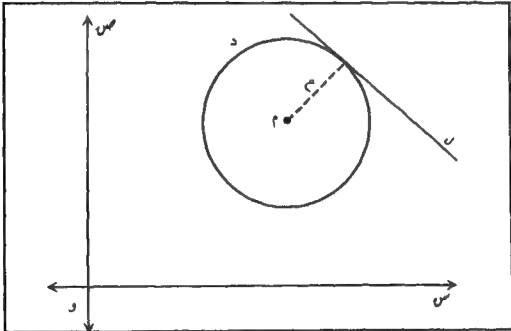
فإن شرط تقاطع المستقيم ل والدائرة د هو

ع > نق

$$> \frac{|-٠ - ٠ - ح|}{\sqrt{٢م + ١٧}}$$

$$> \frac{ح}{\sqrt{٢م + ١٧}}$$

الصورة الثانية : المستقيم عس الدائرة



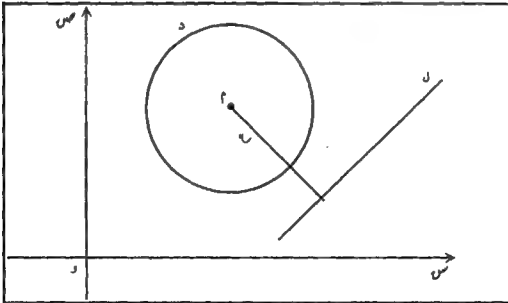
شكل (٢-٥)

من شكل (٢-٥) تتضح العلاقة الهندسية بين المستقيم ل والدائرة د  
في هذه الصورة حيث يكون طول العمود الساقط من المركز على المستقيم  
= نصف قطر الدائرة

أي أن شرط تماس المستقيم والدائرة هو ع = نق  
فإذا كان ل = { (س، ص) : ص = م س + ح }  
، د = { (س، ص) : ص = ص<sup>٢</sup> + نق<sup>٢</sup> }  
فإن الشرط اللازم ليمس المستقيم ل الدائرة د هو

$$\begin{aligned} \text{نق} &= \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2 + 1\sqrt{}} \\ \text{نق} &= \frac{1}{2 + 1\sqrt{}} \end{aligned}$$

الصورة الثالثة : المستقيم والدائرة متباعدان



شكل (٢-٦)

بالنظر إلى شكل (٢-٦) توضح العلاقة الهندسية بين ل ، د في هذه الصورة حيث يكون

طول العمود الساقط من مركز الدائرة على المستقيم < نصف القطر

أي أن شرط التباعد بين المستقيم ل والدائرة د حيث

$$ل = \{ (س ، ص) : ص = م س + ح - \}$$
 والدائرة

$$د = \{ (س ، ص) : س^2 + ص^2 = نق^2 \}$$

$$هو \frac{|-ح-|}{\sqrt{م^2+1}} < نق$$

$$< \frac{ح}{\sqrt{م^2+1}} نق$$

والآن نبدأ بمناقشة الأوضاع الثلاثة السابقة جبريا

إذا أردنا التعرف على صورة العلاقة بين المستقيم والدائرة فإننا نحاول الحصول على التقاطع المشتركة بينهما ويكون ذلك عن طريق الحل الجبري لمعادلتهما معا .

$$\{ (س ، ص) : ص = م س + ح - \} = \{ (س ، ص) : س^2 + ص^2 = نق^2 \}$$

$$، \quad \text{معادلة الدائرة} \quad د = \{ (س ، ص) : س^2 + ص^2 = نق^2 \}$$

وفرضنا أن بينهما نقطة مشتركة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>)

أي أن (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) تقع على المستقيم ل ، إذن تحقق معادلة المستقيم وبالتالي فإن

$$ص_١ = م س_١ + ح - \quad (١)$$

وأيضا (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) تقع على الدائرة إذن تحقق معادلة الدائرة وبالتالي فإن

(٢)

$$س٢ + س١ = نق٢$$

والمعادلتان (١) ، (٢) اثبتان في س١ ، س١ إحداهما من الدرجة الأولى والثانية من الدرجة الثانية ويحلها جبريا كما يلي :

بالتعويض من (١) في (٢) نحصل على

$$س٢ + (م س١ + ح٢) = نق٢$$

$$س٢ + م س١ + ح٢ = نق٢ - ح٢ - س١$$

(٣)

$$(١+م) س٢ + م س١ + ح٢ = نق٢ - ح٢ - س١$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في س١ مميزها  $٢ - ٤أ ح$  حيث أ معامل س١ ، ب معامل س١ ، ح الحد المطلق .

وهنا نتعرض للحالات ثلاث :

الأولى : إذا كان المميز  $٢ - ٤أ ح < ٠$  .

وهذا معناه أن المعادلة (٣) لها جذرين حقيقيين مختلفين س١ ، س٢ وبالتعويض في (١) يتبع قيمتي س١ ، س٢ .

ويكون للمستقيم مع الدائرة نقطتي تقاطع هما (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

والثانية : إذا كان المميز  $٢ - ٤أ ح = ٠$

وهذا معناه أن المعادلة (٣) لها جذرين حقيقيين منطبقين «متساويين» أي نقطتي التقاطع تنطبقان وبالتالي فإن المستقيم ممس الدائرة .

والثالثة : إذا كان المميز  $٢ - ٤أ ح > ٠$

فهذا معناه أن المعادلة (٣) لها جذرين تخيليين أي أن المستقيم لا يقطع الدائرة وبالتالي فإن المستقيم والدائرة متباعدان .

### ملاحظة :

يمكن إيجاد شرط تماس مستقيم ودائرة جبرياً .

إذا فرضنا أن المستقيم ل = { (س ، ص) : ص = م س + ح }  
والدائرة د = { (س ، ص) : س<sup>2</sup> + ص<sup>2</sup> = نق<sup>2</sup> }

فباتباع نفس الخطوات السابقة ومن المعادلة (٣)

نجد أن شرط تماس المستقيم ل ، الدائرة د

$$\text{هو أن المميز} = ٠$$

$$\text{ب} - ٢ - ٤ - \text{أ} - ٠ =$$

$$٤ - م^2 - ح^2 - (١ + م^2)(ح - نق)^2 = ٠$$

$$م^2 - ح^2 - نق^2 + م^2 - م^2 + م^2 نق^2 + م^2 نق^2 = ٠$$

$$\text{ح}^2 = نق^2 + م^2 نق^2$$

$$\text{ح}^2 = نق^2 (١ + م^2)$$

$$\text{ح} = نق \sqrt{١ + م^2}$$

$$\text{نق} = \frac{\text{ح}}{\sqrt{١ + م^2}}$$

وهو نفس الشرط الذي إستنتجناه بالعلاقات الهندسية

ومن هذا الشرط فإن المستقيم ص = م س + ح نق  $\sqrt{١ + م^2}$

يمس الدائرة من ص + نق<sup>2</sup> = نق<sup>2</sup> لجميع قيم م الحقيقية

مثال (٢-٦) :

أوجد نقطتي تقاطع المستقيم ل = { (س ، ص) : ص = س + ٤ }  
والدائرة د = { (س ، ص) : س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> - ٢س - ٨ص + ٤ = ٠ }

الحل :

بحل معادلة المستقيم والدائرة آنيا

(بالتعويض من معادلة المستقيم في معادلة الدائرة نحصل على)

$$ص^2 + (ص + ٤)^2 - ٢(ص + ٤) - ٨ص + ٤ = ٠$$

$$ص^2 + ص^2 + ٨ص + ١٦ - ٢ص - ٨ - ٨ص + ٤ = ٠$$

$$٢ص^2 - ٢ص - ١٢ = ٠ \text{ بالقسمة على } ٢$$

$$ص^2 - ص - ٦ = ٠ \quad (١)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في س

$$١ = أ \quad ١ = ب \quad ٦ = ح$$

$$ب^2 - ٤أح = ١ - ٤(٦) < ٠$$

$$٠ < ٢٥ = ٢٤ + ١ =$$

المعادلة (١) لها جذران حقيقيان مختلفان

من (١) وبالتحليل

$$٠ = (ص - ٣)(ص + ٢)$$

$$ص = ٣ \text{ أو } ص = -٢$$

$$ص = ٣ \text{ أو } ص = -٢$$

وبالتعويض في معادلة المستقيم

$$\text{إذن } ص = ١ \text{ أو } ص = ٦$$

أي أن نقطتي تقاطع المستقيم ل والدائرة هما  $(١, ٣)$  ،  $(٦, ٢)$

مثال (٧-٢) :

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها  $(٤, ١)$  وتمس المستقيم

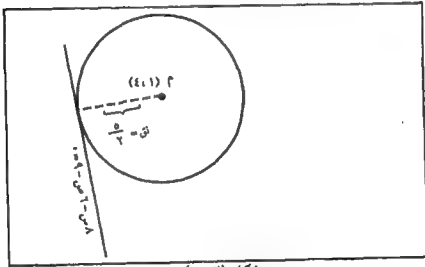
$$ل = \{(س, ص) : ٨س - ٦ص - ٩ = ٠\}$$

الحل :

بما أن المستقيم يمس الدائرة

إذن نق = طول العمود الساقط من المركز على المستقيم ل

$$\frac{٥}{٢} = \frac{٢٥}{١٠} = \frac{|٩ - ٤ \times ٦ - ١ \times ٨|}{٣٦ + ٦٤} =$$



شكل (٧-٢)

إذن مركز الدائرة م  $\equiv (٤, ١)$  ، نصف قطرها نق  $= \frac{٥}{٢}$  (شكل (٧-٢))

$$\frac{٢٥}{٤} = ٢(٤ - ص) + ٢(١ - س)$$



$$s^2 - 2s + 1 + s^2 - 8s + 16 = \frac{25}{4}$$

$$s^2 + 2s - 2s - 8s + 16 = \frac{43}{4}$$

$$4s^2 + 2s - 8s - 32s + 43 = 0$$

(٢-٧) العلاقة بين الدائرة ومحوري الإحداثيات :

أوضحنا فيما سبق الصور الثلاثة لعلاقة المستقيم والدائرة والآن ماذا لو كان المستقيم هو أحد محوري الإحداثيات سنناقش فيما يلي الصور المختلفة لعلاقة الدائرة مع محوري الإحداثيات .

أولاً : تقاطع الدائرة مع محوري الإحداثيات :

نفرض الدائرة د = { (س، ص) :  $s^2 + 2s + 2 + 2s + 2 = 0$  } (١)

ومحور السينات هو المستقيم = { (س، ص) :  $s = 0$  } (٢)

بوضع  $s = 0$  في معادلة الدائرة

$$s^2 + 2s + 2 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في س

$$s^2 - 2s - 2 = 0 \quad (s^2 - 2s - 2)$$

وشرط أن تقطع الدائرة محور السينات في نقطتين هو وجود جذرين حقيقيين

مختلفين للمعادلة (٣)

أي أن مميزها  $< 0$  .

$$4 - 4 - 2 < 0$$

وعليه فإن  $s^2 - 2s - 2 < 0$  هو شرط تقاطع الدائرة مع محور السينات في نقطتين .

وبالمثل فإن شرط تقاطع الدائرة مع محور الصادات في نقطتين أيضا هو

$$ك^2 < ح$$

ثانياً : تباعد الدائرة عن محوري الإحداثيات

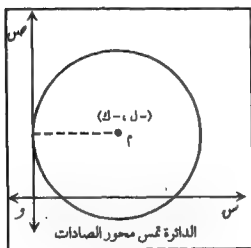
من أولا نجد أن شرط تباعد الدائرة عن محور السينات (لا تقطعه في أي نقطة)

$$ل > ك$$

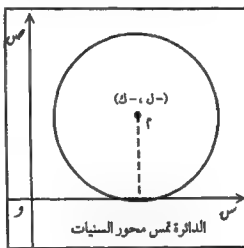
هو

، وشرط تباعد الدائرة عن محور الصادات هو  $ك > ل$

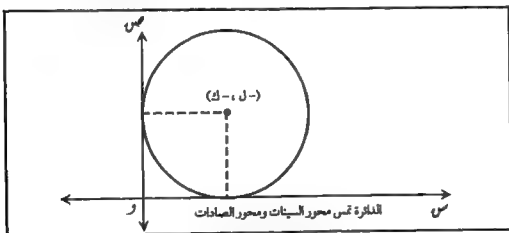
ثالثا : شرط تماس الدائرة لكل من المحورين :



شكل (٩-٢)



شكل (٨-٢)



شكل (١٠-٢)

أوضحنا فيما سبق أن شرط تماس أي مستقيم ودائرة أن يكون مميز معادلة الحل = صفراً وعليه فإن :

(١) الدائرة تمس محور السينات إذا كان

$$٤ (ل - ٢ - ح) = ٠$$

$$(١) \quad \text{اذن} \quad ل = ٢ - ح$$

ولكننا نلاحظ من شكل (٢-٨) أنه كي يمس محور السينات الدائرة فإن

$$(٢) \quad \text{نق} = |ك|$$

والعلاقتان (١)، (٢) لهما نفس الدلالة فإحدهما تؤدي للأخرى ،  
ولكن العلاقة الثانية تستخدم كثيراً عند حل مسائل التماس مع أي من  
المحورين أو كليهما .

(٢) الدائرة تمس محور الصادات اذا كان

$$٤ (ك - ٢ - ح) = ٠$$

$$(٣) \quad \text{اذن} \quad ل = ٢ - ح$$

ومن الشكل (٢-٩) فإن الدائرة تمس محور الصادات إذا كان

$$(٤) \quad \text{نق} = |ل|$$

وأيضاً العلاقتان (٣)، (٤) لهما نفس الدلالة لأن إحدهما تؤدي للأخرى أيضاً  
والعلاقة الثانية هي الأكثر استخداماً عند حل المسائل .

(٣) الدائرة تمس المحورين إذا كان

$$ل = ٢ = ك$$

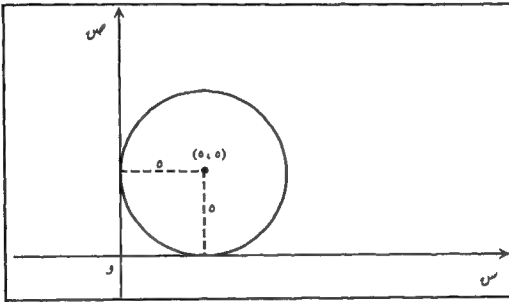
$$\text{اذن} \quad ل = ك = \sqrt{٢ - ح} ،$$

ومن شكل (٢-١٠) فإن الدائرة تمس المحورين اذا كان  $|ل| = |ك| = \text{نق}$

وهنا يجدر الإشارة إلى أنه لتعيين مركز الدائرة فإن إشارة  $l$  أو  $k$  تكون حسب الربع الذي تقع فيه الدائرة .

مثال (٢-٨) :

أوجد معادلة الدائرة التي تمس كلا من المحورين ونصف قطرها يساوي ٥ سم وتقع في الربع الأول .



شكل (٢-١)

الحل :

بما أن الدائرة تمس كلا من المحورين

$$\text{إذن } |l| = |k| = \text{نق}$$

$$\Leftrightarrow |l| = |k| = 5$$

بما أن الدائرة تقع في الربع الأول

إذن مركز الدائرة هو  $(5, 5)$  ، ونصف قطرها ٥ وحدات

إذن معادلتها هي :

$$٢٥ = ٢(٥ - ص) + ٢(٥ - س)$$

$$٢٥ = ٢٥ + ٢٠ - ٢ص + ٢٥ + ٢٠ - ٢س$$

$$٠ = ٢٥ + ٢٠ - ٢ص - ٢س$$

هي معادلة الدائرة المطلوبة

مثال (٢-٩) :

أثبت أن الدائرة  $س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٦ص + ٨ = ٠$  تمس محور الصادات

الحل :

من معادلة الدائرة فإن

$$١٦ = ح - ك$$

$$١٦ = ك^٢$$

$$ك^٢ = ح$$

الدائرة تمس محور الصادات

حل آخر : من معادلة الدائرة

$$١٦ = ح - ك$$

$$١٦ = ح - ك$$

$$١٦ = ح - ك$$

$$٣ = ٩$$

$$١٦ = ٩$$

الدائرة تمس محور الصادات

مثال (٢-١٠) :

أوجد نقاط تقاطع الدائرة

$$د = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 - ٢س + ١ = ٠\}$$

(إن وجدت) مع كل من محوري السينات والصادات

الحل :

بوضع  $ص = ٠$  في معادلة الدائرة

(للحصول على نقط التقاطع مع محور السينات)

$$س^2 - ٢س + ١ = ٠$$

$$(١) \quad ٠ = (س - ١)^2$$

الطرق الأيمن في (١) هو مربع كامل أي أن مميز المعادلة (١) = صفراً

إذن الدائرة تمس محور السينات عند  $س = ١$

أي عند النقطة (١، ٠)

٦ بوضع  $س = ٠$  في معادلة الدائرة

(للحصول على نقط التقاطع مع محور الصادات)

$$ص^2 + ١ = ٠$$

$$\text{المميز} = ٠ - ٤ = -٤ < ٠$$

إذن الجذران تخيليان  $٠ > ٣ =$

وبالتالي فإن الدائرة لا يمكن أن تقطع محور الصادات في أي نقطة

مثال (٢-١١)

أوجد النقط الأربع لتقاطع الدائرة

$$D = \{(s, v) : s^2 + v^2 - 8s + 7v + 12 = 0\}$$

مع محوري الإحداثيات ثم أوجد طول وترى التقاطع

الحصل :

بوضع  $s = 0$  في معادلة الدائرة

$$0 = 12 + 7v - 8s + s^2$$

$$0 = (v-2)(v-6)$$

$$v = 2 \text{ أو } v = 6$$

إذن نقطتي التقاطع مع محور السينات هما

$$(2, 0) , (6, 0)$$

بوضع  $s = 0$  في معادلة الدائرة

$$0 = 12 + 7v - 8s + s^2$$

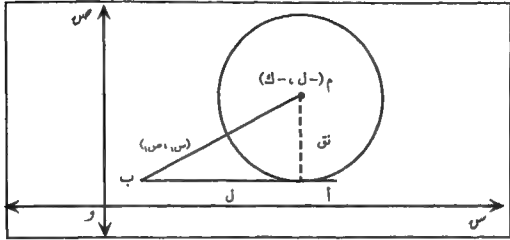
$$0 = (v+3)(v+4)$$

$$v = -3 \text{ أو } v = -4$$

إذن نقطتي تقاطع الدائرة مع محور الصادات هي

$$(0, -3) , (0, -4)$$

(٢-٨) طول المماس المرسوم من نقطة معلومة لدائرة



شكل (٢-١٣)

نفرض الدائرة  $D = \{(s, v) : s^2 + v^2 + 2ls + 2kv + c = 0\}$

$B \equiv (s_1, v_1)$  نقطة خارجها

رسم  $B$  أماسا للدائرة من النقطة  $B$  بمس الدائرة هنداً

المطلوب إيجاد طول المماس  $|AB|$

البرهان : مركز الدائرة  $M \equiv (-l, -k)$

نصل  $AM$  ،  $MB$

$\Delta MAB$  قائم الزاوية في  $A$

من نظرية فيثاغورث

$$|AM|^2 + |AB|^2 = |BM|^2$$

$$|AB|^2 = |BM|^2 - |AM|^2$$



$$\begin{aligned}
|أب|^2 &= (س_1 + ل)^2 + (ص_1 + ك)^2 - نق^2 \\
&= س_1^2 + 2س_1ل + ل^2 + ص_1^2 + 2ص_1ك + ك^2 - نق^2 \\
&= س_1^2 + ص_1^2 + 2س_1ل + 2ص_1ك + (ل^2 + ك^2 - نق^2) \\
&= س_1^2 + ص_1^2 + 2س_1ل + 2ص_1ك + ح \\
|أب|^2 &= س_1^2 + ص_1^2 + 2س_1ل + 2ص_1ك + ح
\end{aligned}$$

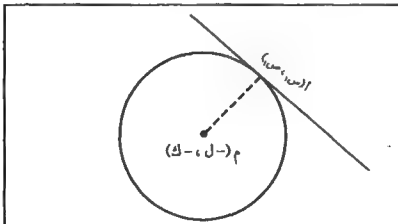
ملاحظات هامة :

١ - إذا كان مربع طول المماس = مقدار موجباً فإن النقطة تقع خارج الدائرة وبالتالي فإنه يمكن رسم مماس منها للدائرة .

٢ - إذا كان مربع طول المماس = صفراً فهذا يعني أن النقطة تقع على الدائرة وتحقق معادلتها .

٣ - إذا كان مربع طول المماس = مقداراً سالباً يكون المماس تخيلي ولا يمكن رسم مماس للدائرة من النقطة والتفسير الهندسي لذلك أن النقطة تقع داخل الدائرة .

( ٢ - ٩ ) معادله المماس للدائرة عند نقطة معلومة :



شكل (٢-١٣)

نفرض الدائرة د = { (س ، ص) : س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> + ٢ل + س + ٢ك ص + ح = ٠ }

، المستقيم ل يمس الدائرة عند النقطة أ (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>)

$$\text{ميل المماس عند نقطة أ} = \left( -\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \right)$$

حيث  $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$  المشتقة الأولى لمعادلة الدائرة ومن معادلة الدائرة نجد ان

$$٢س + ٢ص + ٢ل + س + ٢ك \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

$$٢ص + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} (٢ك + ٢ل + س) = -٢س$$

$$(ص + ك) \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = - (س + ل)$$

$$\text{اذن} \quad \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-(س + ل)}{ص + ك}$$

$$م = \text{ميل المماس عند النقطة} (س_١ ، ص_١)$$

$$= \left( -\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \right)_{(س_١ ، ص_١)} = \frac{-(س_١ + ل)}{ص_١ + ك}$$

اذن معادلة المماس هي :

$$ص - ص_١ = \frac{-(س_١ + ل)}{ص_١ + ك} (س - س_١)$$

$$ص - ص_١ - ٢ك ص + ٢ك ص_١ = -س + س_١ + ٢ل س - ٢ل س_١$$

$$س - س_١ + ٢ل س - ٢ل س_١ + ٢ك ص - ٢ك ص_١ = ٠$$

بإضافة ل س + ٢ل س<sub>١</sub> إلى الطرفين نحصل على

$$س - س_١ + ٢ل س + ٢ل س_١ + ٢ك ص + ٢ك ص_١ = ٠$$

$$= س + ٢ل س + ٢ك ص - س_١ - ٢ل س_١ - ٢ك ص_١$$

وتكون معادلة المماس للدائرة د عند النقطة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) هي :

$$س س_١ + ص ص_١ + ل (س + س_١) + ك (ص + ص_١) - ح = ٠$$

مثال (٢- ١٢)

أوجد طول المماس المرسوم من النقطة (-٢ ، ٥) للدائرة

الحل :

$$\begin{aligned} د = \{ (س ، ص) : س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٨ص + ١٩ = ٠ \} \\ \text{طول المماس} &= \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢ - ٦س_١ + ٨ص_١ + ١٩} \\ &= \sqrt{١٩ + ٤٠ + ١٢ + ٢٥ + ٤} = \sqrt{٩٠} = ١٠ \text{ وحدات طول} \end{aligned}$$

مثال (٢- ١٣)

وضح وضع النقطة (١ ، ١) بالنسبة للدائرة :

$$د = \{ (س ، ص) : س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ص - ٤ = ٠ \}$$

وإذا كانت تقع عليها فأوجد معادلة المماس عندها للدائرة المذكورة

الحل :

بالتعويض بالنقطة (١ ، ١) في معادلة الدائرة

$$١ - ٦ + ٤ - ١ + ١ = ٠$$

$$٠ =$$

إذن النقطة تحقق معادلة الدائرة أي أن النقطة تقع على الدائرة

وتكون معادلة المماس المطلوبة هي :

$$\begin{aligned} ٠ &= س س_١ + ص ص_١ - ٦(س + س_١) + ٤(ص + ص_١) - ٤ \\ ٠ &= س + ص - ٦(١ + ١) + ٤(١ + ١) - ٤ \\ ٠ &= س + ص - ٣ \end{aligned}$$

تمثل معادلة المماس للدائرة عند النقطة (١ ، ١)

## تمارين (٢-٢)

(١) أوجد معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات وتقطع محور السينات في النقطتين (٣، ٠) ، (٧، ٠)

(٢) أوجد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتقع في الربع الرابع ويقع مركزها على المستقيم  $4x + 6y - 24 = 0$

(٣) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتقطع من محور السينات جزءاً قدره ٨ وحدات ومن محور الصادات جزءاً قدره ٦ وحدات

(٤) إذا كانت أ هي النقطة (١-، ٥) ، ب هي النقطة (٣-، ٢) ، ح نقطة تتحرك بحيث تكون زاوية أ ح ب قائمة أثبت المحل الهندسي للنقطة ح هو محيط دائرة وأوجد مركزها ونصف قطرها

(٥) أوجد نقطتي تقاطع المستقيم  $x + y - 1 = 0$  والدائرة

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 17 = 0$$

(٦) أوجد معادلة المماس المرسوم عند النقطة (٣، ٤) للدائرة

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 11 = 0$$

(٧) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣-، ٤) وتمس المستقيم

$$4x + 3y + 20 = 0$$

(٨) أوجد نقطة تقاطع المماسين للدائرة  $x^2 + y^2 + 2x + 16y + 30 = 0$

عند النقطتين (٠، ٠) ، (١٦-، ٠)

(٩) أوجد نقط تقاطع محوري الإحداثيات مع الدائرة

س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> - ١١ س + ٩ ص + ١٨ = ٠ وطول وترى التقاطع الحادئين .

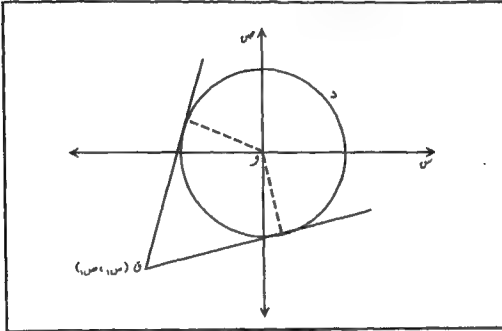
(١٠) أثبت أن الدائرة س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> - ١٤ س + ١٤ ص + ٤٩ = ٠

تمس كلا من المحورين . واذكر الربيع الذي تقع فيه الدائرة .

وأوجد نقطتين التماس .

\*\*\*

(٢-١٠) معادلة المماسين المرسومين من نقطة معلومة لدائرة :



شكل (٢-١٤)

إذا كانت د هي الدائرة  $\{(س, ص) : س^2 + ص^2 = نق^2\}$

،  $ق \equiv (س١, ص١)$  رسم منها مماسان للدائرة

(كما سبق وأوضحنا فإن المستقيم  $ص١ = م١ س١ \pm \sqrt{م١^2 + ١}$  نق

يمس الدائرة لجميع قيم م)

معادلة المماس عند  $(س١, ص١)$  هي  $ص١ = م١ س١ \pm \sqrt{م١^2 + ١}$  نق

إذن  $(ص١ - م١ س١)^2 = نق^2 (١ + م١^2)$

$$ص١^2 - ٢ م١ س١ ص١ + م١^2 س١^2 = نق^2 + م١^2 نق^2$$

$$(١) \quad ٠ = (ص١ - م١ س١)^2 - نق^2 (١ + م١^2)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في م جذريها  $\mu_1, \mu_2$

ويكون المماسان المطلوبان هما :

$$L_1 = \{(s, s) : s - s_1 = \mu_1(s - s_1), \mu_1 = 1\}$$

$$L_2 = \{(s, s) : s - s_1 = \mu_2(s - s_1), \mu_2 = 1\}$$

اذن من كل نقطة معلومة خارج دائرة ما يمكن رسم مماسين لها

نتيجة :

لإيجاد المحل الهندسي للنقطة  $Q_1$  التي يمكن رسم مماسين متعامدين منها للدائرة

$$D = \{(s, s) : s - s_1 + s_2 = 2 \text{ نق } 2\}$$

بما أن المماسين متعامدين

$$(2) \quad 1 - \mu_1 \mu_2 = 1$$

من المعادلة (1) نجد أن حاصل ضرب الجذرين

$$(3) \quad \frac{s_1 - 2 \text{ نق } 2}{s_1 - 2 \text{ نق } 2} = \mu_1 \mu_2$$

من (2)، (3) نجد أن :

$$1 - \mu_1 \mu_2 = \frac{s_1 - 2 \text{ نق } 2}{s_1 - 2 \text{ نق } 2}$$

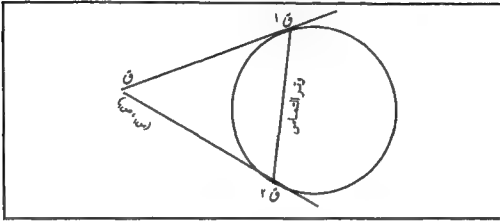
$$\text{اذن } s_1 - 2 \text{ نق } 2 = s_1 - 2 \text{ نق } 2$$

$$\text{أي أن } s_1 - 2 \text{ نق } 2 = s_1 - 2 \text{ نق } 2$$

اذن المحل الهندسي هو الدائرة  $D = \{(s, s) : s - s_1 + s_2 = 2 \text{ نق } 2\}$

أي أن المحل الهندسي للنقطة التي يمكن رسم مماسين متعامدين منها للدائرة  $D = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 = ٢ \text{ نق}^2\}$  هو أيضا دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها  $\sqrt{٢} \text{ نق}$

(٢-١١) معادلة وتر التماس لنقطة معلومه بالنسبة للدائرة :



شكل (٢-١٥)

في البند السابق مباشرة أثبتنا أنه يمكن رسم مماسين من نقطة ما خارج دائرة ما إلى الدائرة والمماسان يكون متساويان في الطول (يمكن إثبات ذلك بسهولة)

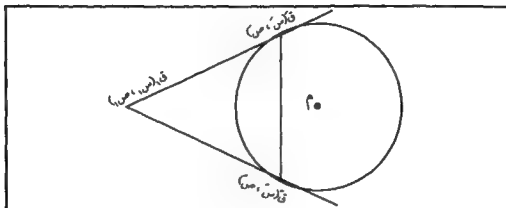
وأوضحنا كيف يمكن إيجاد معادلتهم إذا كان المماسان من ق بمسان الدائرة في ق١، ق٢ (شكل ٢-١٥)

فإذا الوتر ق١ ق٢ يعرف بوتر التماس لنقطة ق بالنسبة للدائرة .

تعريف :

وتر التماس «من نقطه ما ق خارج الدائرة د يمكن رسم مماسين للدائرة د في النقطتين ق١، ق٢ ويكون الوتر ق١ ق٢ هو وتر تماس النقطه ق بالنسبة للدائرة د»





شكل (٢ - ١٦)

ولإيجاد معادلة وتر التماس نفرض أن

النقطة ق (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) رسم مماسان للدائرة

د = { (س، ص) : س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> = ٢ ل + ٢ ك ص + ج = ٠ }  
 فكانت نقطتا التماس هما ق<sup>-</sup> (س<sup>-</sup>، ص<sup>-</sup>) ، ق<sup>+</sup> (س<sup>+</sup>، ص<sup>+</sup>)  
 ويكون ق<sup>-</sup> ق<sup>+</sup> هو وتر التماس المطلوب

ولإيجاد معادلة ق<sup>-</sup> ق<sup>+</sup> فإن

معادلة المماس عند ق<sup>-</sup> : س<sup>-</sup> س<sup>+</sup> + ص<sup>-</sup> ص<sup>+</sup> + ل (س<sup>-</sup> + س<sup>+</sup>) + ك (ص<sup>-</sup> - ص<sup>+</sup>) + ج = ٠ (١)

ومعادلة المماس عند ق<sup>+</sup> : س<sup>+</sup> س<sup>-</sup> + ص<sup>+</sup> ص<sup>-</sup> + ل (س<sup>+</sup> + س<sup>-</sup>) + ك (ص<sup>+</sup> + ص<sup>-</sup>) + ج = ٠ (٢)

بما أن المماسان يتقاطعا في نقطة واحدة ق (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>)

اذن (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) يحقق كلا من معادليتهما

من (١) نجد أن

س<sup>-</sup> س<sub>١</sub> + ص<sup>-</sup> ص<sub>١</sub> + ل (س<sup>-</sup> + س<sub>١</sub>) + ك (ص<sup>-</sup> + ص<sub>١</sub>) + ج = ٠ (٣)

ومن (٢) نجد أن

س<sup>+</sup> س<sub>١</sub> + ص<sup>+</sup> ص<sub>١</sub> + ل (س<sup>+</sup> + س<sub>١</sub>) + ك (ص<sup>+</sup> + ص<sub>١</sub>) + ج = ٠ (٤)

بمقارنة المعادلتين (٣) ، (٤) نجد أن :

س<sup>-</sup> س<sub>١</sub> + ص<sup>-</sup> ص<sub>١</sub> + ل (س<sup>-</sup> + س<sub>١</sub>) + ك (ص<sup>-</sup> + ص<sub>١</sub>) + ج = ٠

وهي تمثل معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين ق ، ق أي أنها معادلة وتر التماس المطلوبة .

مثال ( ٢ - ١٤ ) :

أوجد معادلة وتر التماس للنقطة ( ٥ ، ٥ - ) بالنسبة للدائرة

د = { ( س ، ص ) : س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> = ٥ } ومن ذلك أوجد معادلتني المماسين للدائرة من تلك النقطة .

الحل :

معادلة وتر التماس هي س ص<sub>١</sub> + ص ص<sub>١</sub> = ٥

٥ - س + ٥ ص = ٥

ص - س = ١

إذن ص = ١ + س بالتعويض في معادلة الدائرة

س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> = ٥ نحصل على

س<sup>٢</sup> + (س + ١)<sup>٢</sup> = ٥

٢ س<sup>٢</sup> + ٢ س - ٤ = ٠

س<sup>٢</sup> + س - ٢ = ٠

(س + ٢)(س - ١) = ٠

س = ٢ - أو س = ١

ص = ١ - أو ص = ٢

نقطتان التماس هما ( ١ ، ٢ ) ، ب ( -٢ ، -١ )

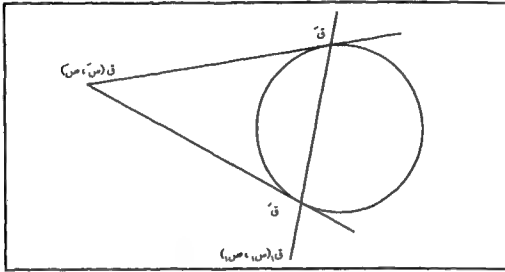
إذن معادلتا المماسين للدائرة عند نقطتي التماس هما

س ص<sup>+</sup> + ص ص<sup>-</sup> = ٥ أو س ص<sup>+</sup> + ص ص<sup>-</sup> = ٥

س<sup>+</sup> ٢ ص<sup>-</sup> = ٥ أو س<sup>+</sup> ٢ ص<sup>-</sup> = ٥

س<sup>+</sup> ٢ ص<sup>-</sup> = ٥ - ٥ = ٠

(٢- ١٢) معادلة الخط القطبي لنقطة معلومه بالنسبه لدائرة :



شكل (٢- ١٦)

إذا رسم قاطع للدائرة من النقطة  $Q_1 (S_1, S_1)$  يقطعها في النقطتين  $Q_1$  و  $Q_2$  ورسم مماسين للدائرة عند  $Q_1$  و  $Q_2$  فإنهما يتقاطعا في نقطة واحدة هي  $Q_2 (S_2, S_2)$  ويكون المحل الهندسي للنقطة  $Q_1$  (نقطة تلاقي المماسين) هو خط مستقيم لجميع أوضاع القاطع  $Q_1 Q_2$  ويسمى هذا المحل الهندسي بالخط القطبي للنقطة  $Q_1$  بالنسبة للدائرة د

تعريف :

إذا رسم من النقطة  $Q_1$  مستقيما يقطع الدائرة في النقطتين  $Q_1$  و  $Q_2$  فإن الخط القطبي للنقطة  $Q_1$  هو المحل الهندسي لنقطة تلاقي المماسين للدائرة د عند  $Q_1$  و  $Q_2$  وهو خط مستقيم .

ويعنى آخر فإننا نستطيع القول بأن النقطة  $Q_1$  تتحرك بحيث أن وتر تماسها  $Q_1 Q_2$  يمر دائما بنقطة ثابتة هي  $Q_1$  وتعرف النقطة  $Q_1$  بقطب الخط القطبي .

ولإيجاد معادلة الخط القطبي لنقطة ما بالنسبة لدائرة ما ، نفرض النقطة  
 $ق_1 \equiv (س_1 ، ص_1)$

والدائرة د = { (س ، ص) :  $س^2 + ص^2 + ٢ل ص + ٢ك ص - ج = ٠$  }

والمطلوب إيجاد معادلة الخط القطبي للنقطة  $ق_1$  بالنسبة للدائرة د

نرسم المماسين عند  $ق_1$  ،  $ق_1$  يتقاطعان في  $ق$  (  $س^-$  ،  $ص^-$  ) شكل (٢-١٦)

فيكون المطلوب هو إيجاد الحل الهندسي للنقطة  $ق$  (  $س^-$  ،  $ص^-$  ) بحيث يمر وتر المماس لها  $ق_1 ق^-$  دائما بالنقطة الثابتة  $ق_1$  (  $س_1$  ،  $ص_1$  )

معادلة وتر التماس للنقطة  $ق$  (  $س^-$  ،  $ص^-$  ) بالنسبة للدائرة د هي :

$$س^- س + ص^- ص + ل (س^- + س) + ك (ص^- + ص) - ج = ٠$$

هذا المستقيم ( وتر التماس ) يمر بالنقطة  $ق_1$  (  $س_1$  ،  $ص_1$  )

إذن  $ق_1$  تحقق معادلته وبالتالي فإن

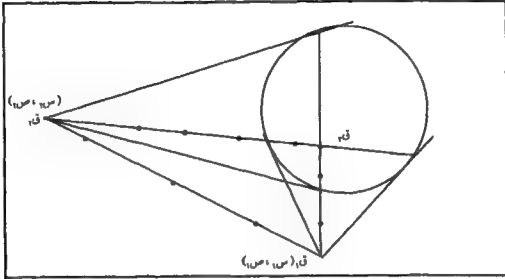
$$س_1 س^- + ص_1 ص^- + ل (س_1 + س^-) + ك (ص_1 + ص^-) - ج = ٠$$

$$س_1 س + ص_1 ص + ل (س + س_1) + ك (ص + ص_1) - ج = ٠$$

هي معادلة الخط القطبي للنقطة  $ق_1$



(٢- ١٣) النقطتان المترافقتان والمثلث المترافق الذاتي بالنسبة للدائرة



شكل (٢- ١٧)

معادلة الخط القطبي للنقطة  $Q_1 (س_١, ص_١)$  هي

$$س_١ س + ص_١ ص + ل (س + س_١) + ك (ص + ص_١) - ج = ٠$$

ومعادلة الخط القطبي للنقطة  $Q_2 (س_٢, ص_٢)$  هي

$$س_٢ س + ص_٢ ص + ل (س + س_٢) + ك (ص + ص_٢) - ج = ٠$$

فإذا مر الخط القطبي للنقطة  $Q_1$  بالنقطة  $Q_2$

فإن الخط القطبي للنقطة  $Q_2$  يمر بالنقطة  $Q_1$  (شكل ٢- ١٧)

وهذا يؤدي إلى الشرط التالي :

$s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 + (s_1 + s_2)k + (s_1 + s_2)j = 0 \quad (1)$   
 ونقول عند ذلك أن النقطتين  $Q_1, Q_2$  مترافقتين

تعريف :

$Q_1, Q_2$  نقطتان مترافقتان بالنسبة للدائرة  $D$  إذا وإذا فقط كان الخط القطبي للنقطة  $Q_1$  بالنسبة لدائرة  $D$  يمر بالنقطة الثانية  $Q_2$

وبالطبع فإن الخط القطبي للنقطة  $Q_2$  بالنسبة للدائرة  $D$  أيضا يمر بالنقطة الأولى  $Q_1$

كما أن الشرط (1) يسمى شرط تراقف النقطتين

$Q_1(s_1, s_2), Q_2(s_3, s_4)$

كذلك ومن الشكل نفسه (2-17)

الخط القطبي للنقطة  $Q_3$  هو  $\overline{Q_1 Q_2}$

وفي هذه الحالة فإن المثلث  $Q_1 Q_2 Q_3$  يسمى بمثلث مترافق ذاتي بالنسبة للدائرة  $D$

تعريف :

يقال أن  $Q_1, Q_2, Q_3$  مثلث مترافق ذاتي بالنسبة لدائرة  $D$  إذا وإذا فقط كان كل ضلع من أضلاعه هو الخط القطبي للرأس المقابل له بالنسبة للدائرة  $D$

إيجاد قطب مستقيم بالنسبة للدائرة :

عرفنا فيما سبق أن الخط القطبي للنقطة  $Q$  بالنسبة لدائرة  $D$  فإذا كان المستقيم  $l$  هو الخط القطبي للنقط  $Q_1$  فإننا نسمى النقطة  $Q$  قطب المستقيم  $l$  بالنسبة للدائرة  $D$  .

والمثال التالي يوضح كيفية تعيين قطب المستقيم بالنسبة للدائرة

أو بمعنى آخر تعيين النقطة إذا علم خطها القطبي بالنسبة للدائرة

مثال (٢-١٥)

أوجد قطب المستقيم ٢ ص - ٣ ص + ٤ = ٠

بالنسبة للدائرة د = { (س، ص) : س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> - ٧ ص + ٥ ص - ٣ = ٠ }

الحل :

نفرض النقطة ق ≡ (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) هي قطب المستقيم المطلوب بالنسبة للدائرة

فإن معادله الخط القطبي للنقطة ق بالنسبة للدائرة د هي :

$$س_١ س + ص_١ ص - \frac{٧}{٢} (س_١ + ص_١) + \frac{٥}{٢} (س_١ + ص_١) - ٣ = ٠$$

$$٠ = (س_١ - \frac{٧}{٢}) (س + \frac{٥}{٢}) + (ص_١ - \frac{٥}{٢}) (ص + \frac{٧}{٢}) - ٣$$

(١)

ولكن معادله المستقيم هي ٢ ص + ٣ ص + ٤ = ٠

بمقارنته معاملات (١)، (٢)

$$\frac{٣ - \frac{٥}{٢} (س_١ + ص_١) + \frac{٧}{٢} (س_١ + ص_١)}{٤} = \frac{س_١ - \frac{٧}{٢}}{\frac{٥}{٢} (س_١ + ص_١) - \frac{٧}{٢} (س_١ + ص_١) - ٣}$$

$$(٣) \quad ١١ س - ٥ ص - ٨ = ٠$$

$$٤ ص + ١٠ = \frac{٢١}{٢} (س_١ + ص_١) - \frac{١٥}{٢} (س_١ + ص_١) + ٩$$

$$(٤) \quad ٢١ س - ٢٣ ص - ٢ = ٠$$

بحل (٣)، (٤) معا يمكننا الحصول على س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub> إحداثيا القطب المطلوب

بضرب (٣) × ٢٣ ، (٤) × ٥

$$٢٥٣ \text{ ص } ١ - ١١٥ \text{ ص } ١ - ١٨٤ = ٠$$

$$١٠٥ \text{ ص } ١ - ١١٥ \text{ ص } ١ - ١٠ = ٠$$

$$١٧٤ = ١٤٨ \text{ ص } ١ \quad \text{بالطرح}$$

$$\frac{٨٧}{٧٤} = \frac{١٧٤}{١٤٨} = \text{ص } ١$$

بالتعويض في (٣)

$$٠ = ٨ - \text{ص } ١ - \frac{٨٧}{٧٤} \times ١١$$

$$\frac{٧٣}{٧٤} = \text{ص } ١ \Leftrightarrow \frac{٣٦٥}{٧٤} = \text{ص } ٥$$

القطب المطلوب هو النقطة  $(\frac{٧٣}{٧٤}, \frac{٨٧}{٧٤})$

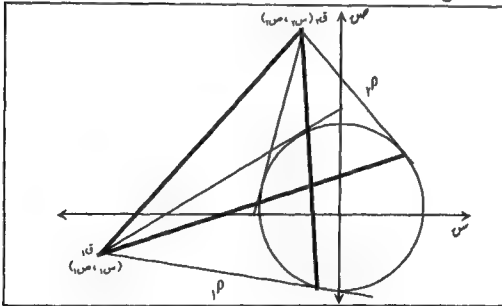
مثال (٢-١٦) :

إذا كان  $ق_١$ ،  $ق_٢$  نقطتان مترافقتان بالنسبة لدائرة ما د

$$\text{فأثبت أن } |ق_١ ق_٢| = |ق_١ ق_٢|$$

حيث  $ق_١$ ،  $ق_٢$  هما طولوا المماسين من  $ق_١$ ،  $ق_٢$  للدائرة على الترتيب

الحل :



شكل (٢-١٨)



انظر شكل (٢-١٨) من قانون البعد نحصل على

$$(١) \quad |ق_١ ق_٢| = |ص_١ ص_٢ - ص_١ ص_٢| + |ص_١ ص_٢ - ص_١ ص_٢|$$

بفرض الدائره د = { (س، ص) : س = ص + ص = ص نق }  
 شرط توافق النقطتين ق<sub>١</sub> ، ق<sub>٢</sub> هو :

$$(٢) \quad ص_١ س_١ + ص_١ ص_٢ = ص_٢ نق$$

$$|ق_١ ق_٢| = ص_١ س_٢ + ص_٢ س_١ - ص_٢ س_١ - ص_٢ ص_١ + ص_٢ ص_١ + ص_٢ ص_١ - ص_٢ ص_١ = ص_٢ س_١ + ص_٢ س_١ - ص_٢ ص_١ + ص_٢ ص_١ = ص_٢ (س_١ + ص_١) = ص_٢ (س_١ + ص_١) = ص_٢ (س_١ + ص_١)$$

٢، هو طول المماس المرسوم من النقطة (س، ص) للدائره د  
 إذن ٢، = ص<sub>١</sub> س<sub>١</sub> + ص<sub>١</sub> ص<sub>٢</sub> نق

٢، هو طول المماس المرسوم من النقطة (س، ص) للدائره د  
 $ص_٢ س_٢ = ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ - ص_٢ نق$

$$[ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ - ص_٢ نق] + [ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ - ص_٢ نق] = ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ - ص_٢ نق$$

$$(٤) \quad (ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ - ص_٢ نق) + (ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ - ص_٢ نق) = ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ - ص_٢ نق$$

بالتعويض من (٢) في (٤)

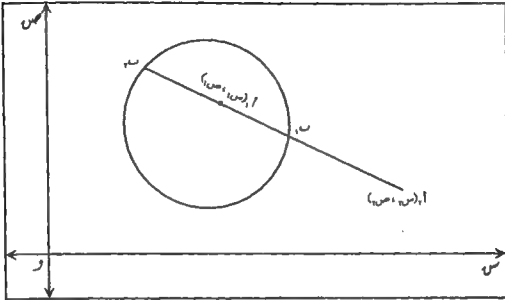
$$(٥) \quad ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ - ص_٢ نق = ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ - ص_٢ نق + ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ - ص_٢ نق$$

من (٣) ، (٥) نجد أن

$$|ق_١ ق_٢| = ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢ = ص_٢ س_٢ + ص_٢ ص_٢$$

وهو المطلوب

(٢- ١٤) معادلة يو خمشتال



شكل (٢- ١٩)

إذا فرضنا أن لدينا الدائره

$$د = \{(س, ص) : س^2 + ص^2 + ٢س + ٢ص + ج = ٠\}$$

، النقطة أ<sub>١</sub> (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) تقع داخل الدائره

، النقطة أ<sub>٢</sub> (س<sub>٢</sub>، ص<sub>٢</sub>) تقع خارج الدائره أنظر شكل (٢- ١٩)

فإذا ارسم المستقيم أ<sub>١</sub> أ<sub>٢</sub> ليقطع الدائره في النقطتين ب<sub>١</sub>، ب<sub>٢</sub>

فإن ب<sub>١</sub> تقسم أ<sub>١</sub> أ<sub>٢</sub> من الداخل بنسبة ما ولتكن ق<sub>١</sub> : ق<sub>٢</sub>

إحداثيات نقطة التقسيم ب<sub>١</sub> هي

$$\left( \frac{ق_1 س_1 + ق_2 س_2}{ق_1 + ق_2}, \frac{ق_1 س_2 + ق_2 س_1}{ق_1 + ق_2} \right)$$

بما أن ب تقع على الدائرة د إذن تحقق معادلتها

$$2 \left( \frac{ق_1 س_1 + ق_2 س_2}{ق_1 + ق_2} \right) + 2 \left( \frac{ق_1 س_2 + ق_2 س_1}{ق_1 + ق_2} \right)$$

$$+ 2 \left( \frac{ق_1 س_1 + ق_2 س_2}{ق_1 + ق_2} \right) + 2 \left( \frac{ق_1 س_2 + ق_2 س_1}{ق_1 + ق_2} \right) = 0$$

وبالضرب  $\times (ق_1 + ق_2)^2$  نحصل على

$$2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2) + 2(ق_1 س_2 + ق_2 س_1)$$

$$+ 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2) + 2(ق_1 س_2 + ق_2 س_1)$$

$$+ 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2) + 2(ق_1 س_2 + ق_2 س_1) + 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2)$$

$$+ 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2) + 2(ق_1 س_2 + ق_2 س_1) + 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2)$$

$$+ 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2) + 2(ق_1 س_2 + ق_2 س_1) + 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2)$$

$$+ 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2) + 2(ق_1 س_2 + ق_2 س_1) + 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2)$$

$$(1) \quad + 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2) + 2(ق_1 س_2 + ق_2 س_1) + 2(ق_1 س_1 + ق_2 س_2) = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في  $\frac{ق_1}{ق_2}$  أو  $\frac{ق_2}{ق_1}$

وهي تعطي جذرين هما نسبتي التقسيم إحداها من الداخل

والأخرى من الخارج ويمكن تحويل هذه المعادلة الى صورة أبسط للتعامل فإذا اعتبرنا

$$د (س_1، س_2) = س_1^2 + 2س_1س_2 + 2س_2س_1 + 2س_2^2$$

$$د (س_3، س_4) = س_3^2 + 2س_3س_4 + 2س_4س_3 + 2س_4^2$$

$$p = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 + l(s_1 + s_2) + k(s_1 + s_2) + j$$

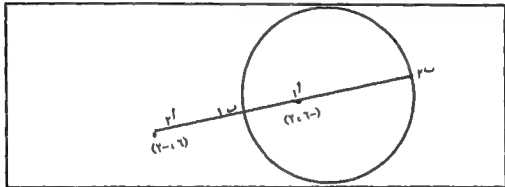
فإن المعادلة (١) تصبح في الصورة

$$d(s_1, s_2, s_3) = p_1 + p_2 + d(s_1, s_2) + d(s_1, s_3) + d(s_2, s_3) = 0$$

وهذه هي معادلة يوخمشتال لنسبتي التقسيم

ومن هذه المعادلة الأخيرة فأنا نستطيع الحصول على النسبة التي ينقسم بها مستقيم ما ل بدائرة ما د من الداخل والخارج ولتوضيح أكثر إليك المثال التالي :  
مثال (٢-١٧)

اثبت أن الدائرة د = { (س، ص) } : س + ٢ ص - ١٨ - ٤ ص + ٤٠ = ٠  
تقسم المستقيم الواصل بين النقطتين (٢، ٦-)، (٢، ٤-) من الداخل والخارج بنسبة ٣ : ١



شكل (٢-٢٠)

الحل :

من شكل (٢-٢٠) نجد أن النقطة (٢، ٦-) تقع داخل الدائرة

أما النقطة (٢، ٤-) فتقع خارجها

$$ويعود د(س، ص) = (س، ص) = ٣٦ - ٤ + ١٨ - ٤ - ٦(٢ - ٤) + ٤٠ =$$

(١)

$$٢٠ - ١٠٨ - ٨٨ =$$

$$d) (من_1، ص_1) = 40 + 2 \times 4 - (6-) 18 - 4 + 36 =$$

$$8 - 108 + 80 =$$

$$(2) \quad 180 =$$

$$40 + (2-2) (2-) + (6+6-) (9-) + (2-) 2 + 6 (6-) = p$$

$$(3) \quad 0 = 40 + 40 - = 40 + 4 - 36 - =$$

بالتعويض من (1)، (2)، (3) في معادلة يوغمشتال

$$0 = 180 ق_1 + 2 (0) ق_1 ق_1 + (20-) ق_1 ق_1$$

$$0 = 180 ق_1 - 2 ق_1 ق_1$$

$$0 = 9 ق_1 - 2 ق_1 ق_1$$

$$0 = 9 \left( \frac{ق_1}{ق_1} \right)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{ق_1}{ق_1} \Leftarrow \frac{1}{9} = 9 \left( \frac{ق_1}{ق_1} \right)$$

إذن  $ق_1 : ق_1 = 3 : 1$  وهو المطلوب

\*\*\*

### تمارين (٢-٣)

(١) برهن أن المستقيم ٢ ص + ص = ٤ مماس للدائرة

$$د = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 - ٦س - ١٠ص + ٢٩ = ٠\}$$

(٢) برهن أن المستقيم ٢ ص - ٣ ص = ١٤ مماس مشترك للدائرتين

$$د_١ = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 - ٤س - ٢ص - ٨ = ٠\}$$

$$د_٢ = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 - ١٠س - ٦ص + ٢١ = ٠\}$$

(٣) أوجد معادلة وتر التماس للمماسين المرسومين للدائرة

$$د = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 - ٤س - ٦ص + ٣ = ٠\}$$

من نقطة الأصل ومن ذلك برهن أن معادلتى المماسين هما

$$س + ٢ص + ١٢ = ٠$$

(٤) إذا كان وتر التماس للمماسين المرسومين من نقطة ن للدائرة

$$د_١ = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 - ٢ص - ٢س = ٠\}$$

$$د_٢ = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 - ٢ص - ٢س = ٠\}$$

برهن أن المحل الهندسي للنقطة ن هو منحنى معادلته  $ص^2 = ٢(١ - ٢س)$

(٥) أوجد إحداثيات نقط التماس للمماسان المرسومان من النقطة (٢، ٠)

$$د = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 - ٢ص - ٢س + ٦ص + ٥ = ٠\}$$

(٦) برهن على أن زوج المماسات من النقطة (١ -، ٣) إلى الدائرة

$$د = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 = ٥\}$$

متعامدان كل على الآخر .

(٧) عين معادلة زوج المماسات التي ترسم من نقطة الأصل الى الدائرة

$$د = \{(س، ص) : س^2 + ص^2 + ٨س + ٦ص + ٢١ = ٠\}$$

(٨) إذا قطع الخط المستقيم الواصل بين النقطتين أ (-٥، ٧) ، ب (٤، -٥)

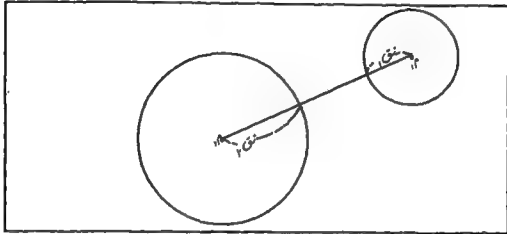
الدائرة د = {(س، ص) : س^2 + ص^2 + ٢س - ٢ص - ٥ = ٠} فسي  
النقطتين ج، د فابعد النسبتين أ ج : ج ب ، أ د : د ب ثم أوجد  
إحداثيات النقطتين ج، د .

\*\*\*

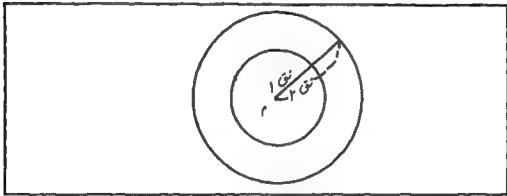
## (٢-١٥) العلاقة بين دائرتين

إن تصورنا الهندسي للعلاقة بين دائرتين لا يخرج عن صور ثلاث كما يلي :

الصورة الأولى : الدائرتان متباعدتان



شكل (٢١-٢)



شكل (٢٢-٢)

إذا كانت الدائرتان هما

$$د_١ = \{ (س، ص) : س^٢ + ص^٢ + ٢ل_١س + ٢ك_١ص + ج_١ = ٠ \}$$

$$د_٢ = \{ (س، ص) : س^٢ + ص^٢ + ٢ل_٢س + ٢ك_٢ص + ج_٢ = ٠ \}$$



فإن من الواضح من شكل (٢-٢١) أن الشرط الهندسي لتباعد الدائرتين  
(خارجيا) هو

$$|r_1 + r_2| < |r_1 - r_2|$$

$$r_1 + r_2 < |r_1 - r_2|$$

$$r_1 + r_2 + r_3 < |r_1 - r_2| + |r_1 - r_3|$$

$$r_1 + r_2 + r_3 < |r_1 - r_2| + |r_1 - r_3|$$

$$r_1 + r_2 + r_3 < |r_1 - r_2| + |r_1 - r_3|$$

$$r_1 + r_2 + r_3 < |r_1 - r_2| + |r_1 - r_3|$$

$$r_1 + r_2 + r_3 < |r_1 - r_2| + |r_1 - r_3|$$

$$r_1 + r_2 + r_3 < |r_1 - r_2| + |r_1 - r_3|$$

$$r_1 + r_2 + r_3 > |r_1 - r_2| + |r_1 - r_3|$$

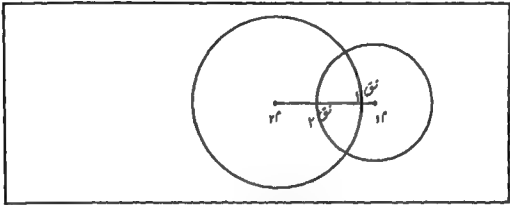
$$r_1 + r_2 + r_3 > |r_1 - r_2| + |r_1 - r_3|$$

$$r_1 + r_2 + r_3 > |r_1 - r_2| + |r_1 - r_3|$$

$$r_1 + r_2 > |r_1 - r_2|$$

وهذا هو الشرط اللازم لتباعد الدائرتين د، د.

الصورة الثانية : الدائرتان متقاطعتان



شكل (٢-٢٣)

بالنظر الى شكل (٢-٢٣)

نجد أن الشرط الهندسي لتقاطع الدائرتان ١، ٢ هو

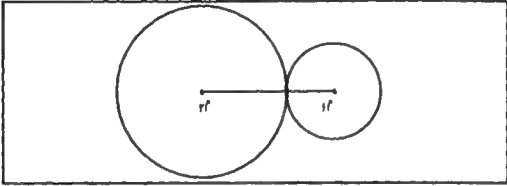
$$|٢٢ - ١١| < تق + ١٢$$

ومن السهل الحصول على شرط تقاطع الدائرتين بنفس الاسلوب المستخدم في إيجاد شرط التباعد ويكون

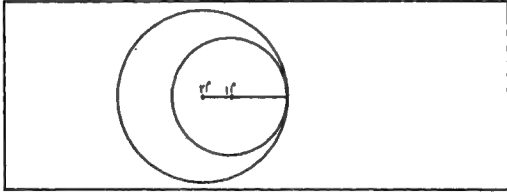
$$[٢(ل١ل٢ + ك١ك٢ + ٢٢) - (ل١ - ك١ - ج١)(ل٢ + ك٢ - ج٢)] < ٢(ج١ + ج٢)$$

هو الشرط اللازم لتقاطع الدائرتين ١، ٢

الصورة الثالثة : الدائرتان متماستان



شكل (٢-٢٤)



شكل (٢-٢٤ ب)

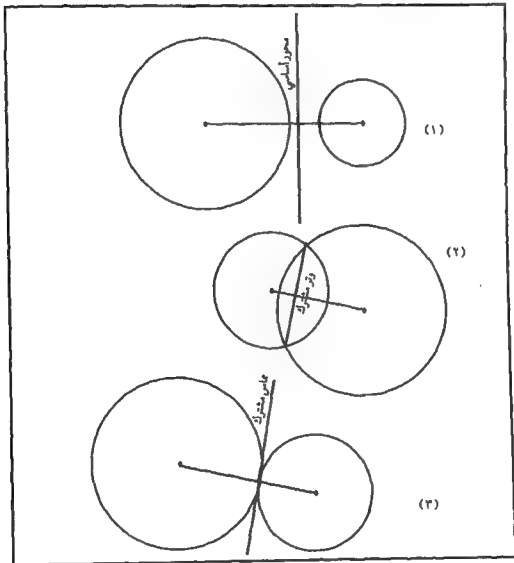
إن الشرط الهندسي لتماس الدائرتين  $d_1$ ،  $d_2$  من الخارج أو من الداخل  
شكل (٢-٢٤)، شكل (٢-٢٤ ب) على الترتيب هو :

$$|r_2 - r_1| = \text{نق} \pm \text{نق}_2$$

وينفس الأسلوب السابق في الصورة الأولى نجد أن الشرط اللازم لتماس الدائرتين د، د<sub>١</sub> من الخارج أو الداخل هو

$$[ (ل_١ + ل_٢ + ك_١ \pm ك_٢) (ل_١ - ل_٢ + ك_١ + ك_٢ - ج_٢) (ل_١ - ل_٢ + ك_١ - ك_٢ - ج_٢) ]^2 = ج_١ + ج_٢$$

نتيجة: الوتر المشترك - المماس المشترك - المحور الأساسي



شكل (٢-٢٥)

لتكن د<sub>١</sub>، د<sub>٢</sub> دائرتان هما

$$د_1 = \{ (س، ص) : س^2 + ص^2 + ٢ل_١ + ٢ك_١ ص + ج_١ = ٠ \}$$

$$د_2 = \{ (س، ص) : س^2 + ص^2 + ٢ل_٢ + ٢ك_٢ ص + ج_٢ = ٠ \}$$

فإذا كانت ي<sub>١</sub> هي معادلة د<sub>١</sub> و ي<sub>٢</sub> هي معادلة د<sub>٢</sub>

$$فإن ي_١ - ي_٢ = ٢(ل_١ - ل_٢)س + ٢(ك_١ - ك_٢)ص + (ج_١ - ج_٢) = ٠$$

وهذه معادلة من الدرجة الأولى في كل من س، ص وبالتالي فهي تمثل خط مستقيم وهنا نتعرض للصورتين السابقتين

وبالرجوع الى شكل (٢ - ٢٦) نجد أن في :

$$(١) \text{ الدائرتان متباعدتان وتكون المعادلة } (ي_١ - ي_٢) = ٠$$

هي معادلة المحور الاساسي

$$(٢) \text{ الدائرتان متقاطعتان وتكون المعادلة } (ي_١ - ي_٢) = ٠$$

هي معادلة الوتر المشترك

$$(٣) \text{ الدائرتان متماسكتان وتكون المعادلة } (ي_١ - ي_٢) = ٠$$

هي معادلة المماس المشترك

ملاحظة هامة : المحور الاساسي أو الوتر المشترك أو المماس المشترك

عمودي على خط المركزين

$$\text{ففي الدائرتين } د_١، د_٢ \text{ ميل خط المركزين } = \left( \frac{ك_١ - ك_٢}{ل_١ - ل_٢} \right)$$

فيكون ميل أي من المحور الاساسي أو الوتر المشترك أو المماس المشترك

$$\left( \frac{ل - ١}{٢} - \frac{ك - ١}{٢} \right) = -$$

والآن نأتي الى مزيد من التفاصيل للدراسة الدائرتين المتقاطعتان ونبدأها بكيفية

تعيين نقطتي تقاطع الدائرتين ١، ٢، ٣

فبفرض تساوي معاملي س ٢، ص ٢ في كل من ١، ٢، ٣

(١، ٢، ٣) هما معادلتين ١، ٢، ٣ على الترتيب

فكما ذكرنا سابقا ١ - ٢ = ٠ تعطي معادلة خط مستقيم هو في حالة

التقاطع الوتر المشترك للدائرتين فإذا أمكن حل معادلة هذا الوتر المشترك مع إحدى

الدائرتين فأننا نحصل على نقطتين هما نقطتي تقاطع الدائرتين وسنعرض أسلوب

الحل من خلال المثال التالي

مثال (٢-١٨) :

أوجد نقطتي تقاطع الدائرتين

$$١ = \{ (س، ص) : س^٢ + ص^٢ - ٤س - ٤ص + ٤ = ٠ \}$$

$$٢ = \{ (س، ص) : س^٢ + ص^٢ - ٢ص = ٤ \}$$

الحل :

$$١ - ٢ = ٠$$

$$س^٢ + ص^٢ - ٤س - ٤ص + ٤ = ٤$$

$$س^٢ + ص^٢ - ٤س = ٠$$

$$0 = 8 - \text{س} - \text{ع} + \text{ص}$$

وهي معادلة الوتر المشترك للدائرتين

$$\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = 2$$

$$\text{س} - \text{ع} = 2 - \text{ص}$$

بالتعويض في  $\text{ع}$  نحصل على

$$\text{ع} = 2 - \text{ص} + \text{ص}^2$$

$$\text{ص}^2 - \text{ع} + \text{ع} + \text{ص} = 2$$

$$0 = \text{ص}^2 - \text{ع} + \text{ص}$$

$$0 = \text{ص}(\text{ص} - \text{ع})$$

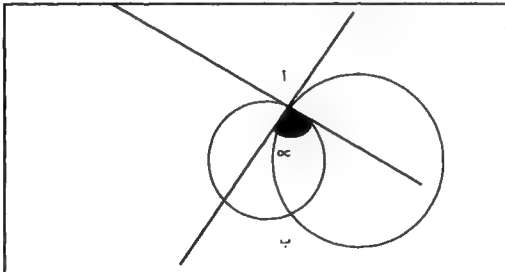
$$\text{ص} = 0 \quad \text{أو} \quad \text{ص} = \text{ع}$$

$$\text{س} = 2 \quad \text{أو} \quad \text{س} = 0$$

اذن نقطتي التقاطع  $(0, 2)$  ،  $(2, 0)$

$$\text{أي أن } \text{د}_1 \cap \text{د}_2 = \{(0, 2), (2, 0)\}$$

(٢-١٦) زاوية تقاطع دائرتين :



شكل (٢-٢٧)

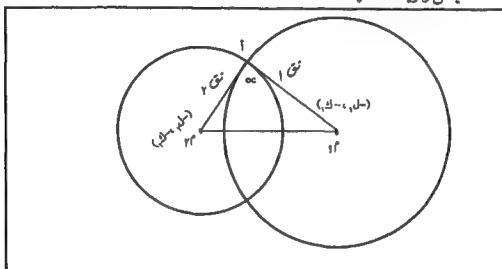
إذا تقاطعت دائرتان  $د_1$  ،  $د_2$  في نقطتين مثل  $أ$  ،  $ب$  شكل (٢-٢٧) ورسمنا عند إحدى نقطتي التقاطع مماساً لكل من الدائرتين فإن الزاوية الناتجة ( بين المماسين ) عند أي من نقطتي التقاطع تسمى بزاوية تقاطع الدائرتين  $د_1$  ،  $د_2$

تقاطع دائرتين على التعماد :

تعريف :

تقاطع الدائرتان  $د_1$  ،  $د_2$  على التعماد إذا وإذا فقط كان

مقياس زاوية تقاطعهما  $= 90^\circ$



شكل (٢-٢٨)

فالدائرتان  $د_1 = \{ (س ، ص) : س^2 + ص^2 + ٢ل١س + ٢ك١ص + ج١ = ٠ \}$

$د_2 = \{ (س ، ص) : س^2 + ص^2 + ٢ل٢س + ٢ك٢ص + ج٢ = ٠ \}$

متقاطعتان على التعماد إذا كانت الزاوية  $\infty$  (زاوية التقاطع للدائرتين) قائمة

شكل (٢-٢٨)

فإذا كان  $م$  هو مركز الدائرة الأولى  $(-ل١ ، -ك١)$



٤ م هو مركز الدائرة الثانية (ل-، -ك) (مركز الثانية)

اذن المماس للدائرة د عند النقطة أ يمر بالنقطة م (مركز الثانية)

والمماس للدائرة د عند النقطة أ يمر بالنقطة م (مركز الأولى)

أي أن في حالة تقاطع دائرتين على التعامد تكون الزاوية بين المماسين عند النقطة أ هي نفس الزاوية بين نصف القطرين عند النقطة أ

اذن المثلث م أ م قائم الزاوية

$$|م أ م|^2 = |م أ د|^2 + |م أ م|^2$$

$$(ل - ل)^2 + (ل - ل)^2 = (ل - ل)^2 + (ل - ل)^2$$

$$2(ل - ل) = (ل - ل) + (ل - ل)$$

وهو شرط تقاطع الدائرتين د، د على التعامد

مثال (٢-١٩) :

أثبت أن الدائرتين

$$د_1 = \{ (س، ص) : س^2 + ص^2 - ٦س - ١٠ص + ٢٥ = ٠ \}$$

$$د_2 = \{ (س، ص) : س^2 + ص^2 + ٢س - ٤ص - ١١ = ٠ \}$$

متقاطعتان على التعامد وأوجد معادلة الوتر المشترك لهما .

الحل :

الدائرة الأولى :

المركز (٣، ٥)

$$نق = \sqrt{٩ + ٢٥ - ٢٥} = ٣$$



$$س٢ + ص٢ - ٦س - ١٠ص = ٢٥ = ٠$$

$$س٢ + ص٢ - ٢س - ٤ص = ١١ = ٠ ، \text{ وبالطرح نحصل على}$$

$$٠ = ٣٦ + ص٦ - ٨س$$

$$٠ = ١٨ - ص٣ + ٤س$$

مثال (٢ - ٢٠) :

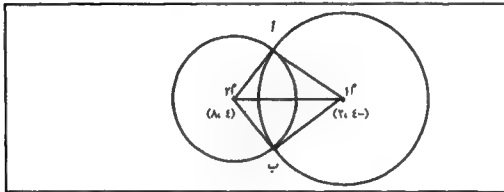
بفرض الدائرة د<sub>١</sub> = { (س، ص) : س٢ + ص٢ - ٢س - ٨ص - ٤٤ = ٠ }

والدائرة د<sub>٢</sub> مركزها (٤، ٨)

فإذا علمت أن د<sub>١</sub>، د<sub>٢</sub> تتقاطعان على التعماد فأوجد نصف قطر الدائرة د<sub>٣</sub>  
وإذا كانت أ، ب هما نقطتا تقاطع الدائرتين فأوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الأربعة

أ، م<sub>١</sub>، ب، م<sub>٢</sub> على الترتيب

(م<sub>١</sub>، م<sub>٢</sub> هما مركز الدائرتين د<sub>١</sub>، د<sub>٢</sub>)



شكل (٢ - ٣٠)

الحل :

الدائرة الاولى د<sub>١</sub> :

$$\text{مركزها } م \equiv (٢، ٤) ، \text{ ونصف قطرها } = \sqrt{١٦ + ٤ + ٤ + ٤٤} = ٨$$

الدائرة الثانية د<sub>٢</sub> :

مركزها م<sub>٢</sub> ≡ (٤، ٨) ونصف قطرها نق

بما ان الدائرتان متقاطعتان على التعامد

$$\text{اذن } |م_٢م_١|^2 = \text{نق}_١^2 + \text{نق}_٢^2$$

$$(-٤ - ٨)^2 + ٦٤ = (٨ - ٢)^2 + \text{نق}_٢^2$$

$$٦٤ + ٣٦ = \text{نق}_٢^2$$

$$\text{اذن نق}_٢^2 = ٣٦ \Rightarrow \text{نق}_٢ = ٦$$

المطلوب ثانيا : إيجاد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الأربع أ ، م<sub>١</sub> ، ب ، م<sub>٢</sub>

بما أن أ قائمة اذن م<sub>١</sub>م<sub>٢</sub> قطر في الدائرة أي إن معادلة الدائرة هي

$$(س + ٤)(س - ٤) + (ص - ٢)(ص - ٨) = ٠$$

$$س^٢ + ص^٢ - ١٠ص + ٣٢ = ٠$$

(٢-١٧) المعادلة العامة لعائلة الدوائر التي تمر بنقطة تقاطع دائرتين

$$\text{إذا كانت د}_١ = \{(س، ص) : س^٢ + ص^٢ + ٢ل_١س + ٢ك_١ص + ج_١ = ٠\}$$

$$\text{د}_٢ = \{(س، ص) : س^٢ + ص^٢ + ٢ل_٢س + ٢ك_٢ص + ج_٢ = ٠\}$$

متقاطعتان

$$\text{فإن المعادلة } س^٢ + ص^٢ + ٢ل_٢س + ٢ك_٢ص + ج_٢ = ٠$$

$$+ (س^٢ + ص^٢ + ٢ل_١س + ٢ك_١ص + ج_١) = ٠ \quad (١)$$

تمثل عائلة الدوائر التي تمر بنقطتي التقاطع للدائرتين

ولجميع قيم ك الحقيقية فإن المعادلة تعطي دائرة عدا حالة واحدة وهي بالطبع

إذا كانت ك = -١ وفي هذه الحالة فإن المعادلة الناتجة تصبح معادلة خط مستقيم هو

وتر التقاطع للدائرتين .

مثال (٢-٢٢) :

أوجد معادله الدائره التي تمر بنقطه تقاطع الدائرتين

$$د_1 = \{ (س، ص) : س^2 + ص^2 - س - ص - 2 = 0 \}$$

$$د_2 = \{ (س، ص) : س^2 + ص^2 + س - 4 - ص - 8 = 0 \}$$

وتمر بالنقطه (١، ٣)

الحل :

معادله أي دائره تمر بنقطه تقاطع الدائرتين

$$س^2 + ص^2 - س - ص - 2 + ك(س^2 + ص^2 + س - 4 - ص - 8) = 0$$

(١)

بما أن النقطه (١، ٣) تقع على الدائره اذن تحقق معادلتها

بالتعويض عن النقطه (١، ٣) في (١) نحصل على

$$0 = (٨ - ٤ - ١٢ + ١ + ٩)ك + ٢ - ١ - ٣ - ١ + ٩$$

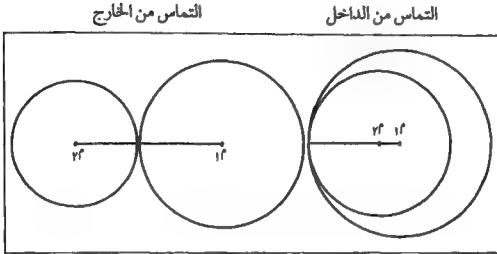
$$٠ = ك(١٠) + ٤$$

$$\frac{٢}{١٠} = ك \iff ٤ - ك = ٠$$

بالتعويض عن ك في (١) نتج معادله الدائره وهي

$$س^3 + ص^3 + ١٣ - ٢ - س - ٣ + ٦ = ٠$$

(٢- ١٨) نقطة التماس ومعادلة المماس المشترك



شكل (٢- ٣١)

لتعيين نقطة التماس من الداخل : تعيين النقطة التي تقسم  $M_1 M_2$  من الخارج بنسبة  
نق ١ : نق ٢

ولتعيين نقطة التماس من الخارج : تعيين النقطة التي تقسم  $M_1 M_2$  من الداخل بنسبة  
نق ١ : نق ٢

كما يمكننا إيجاد معادلة التماس للدائرتين عند نقطة التماس باستخدام نقطة التماس والميل الذي يمكن إيجاده بعد إيجاد ميل خط المركزين والاستفادة بالعلاقة الهندسية :

( خط المركزين عمودي على التماس المشترك للدائرتين )

$$\frac{1}{m} = - \text{ فإن ميل المماس المشترك } = - \frac{1}{m}$$

وإذا فرضنا أن نقطة التماس هي  $(M_1, S_1)$

تكون معادلة المماس المشترك هي :

$$S_1 - S_2 = \frac{1}{m} (S_1 - S_2)$$

مثال ( ٢ - ٢٣ ) :

اثبت أن الدائرتين  $س^٢ + ص^٢ = ٦$  -  $س$  -  $٨$  و  $س + ٩ = ٠$   
 ،  $س^٢ + ص^٢ = ١$  متماسان من الخارج وأوجد نقطة التماس  
 ومعادلة المماس المشترك لهما عند نقطة التماس .

الحل :

الدائرة الأولى  $س^٢ + ص^٢ = ٦$  -  $س$  -  $٨$  و  $س + ٩ = ٠$

مركزها  $م_١ = ( ٣ ، ٤ )$

ونصف قطرها  $نق_١ = \sqrt{٩ - ١٦ + ٩} = ٤$

الدائرة الثانية  $س^٢ + ص^٢ = ١$

مركزها  $م_٢ = ( ٠ ، ٠ )$

ونصف قطرها  $نق_٢ = ١$

اذن طول خط المراكزين  $م_١ م_٢ = \sqrt{٢(٠ - ٤) + ٢(٣ - ٠)} = ١٢$

$$٥ = \sqrt{٢٥} = \sqrt{١٦ + ٩}$$

$$نق_١ + نق_٢ = ٤ + ١ = ٥$$

اذن  $م_١ م_٢ = نق_١ + نق_٢$

اذن الدائرتين متماستين من الخارج في نقطة أ

أ تقسم  $م_١ م_٢$  من الداخل بنسبة ٤ : ١

ص : ٤

$$\frac{4 \times 1 + 0 \times 4}{0} = \text{ص}$$

$$\frac{4}{0} = \text{ص}$$

س : ٣

$$\frac{1 \times 3 + 0 \times 4}{0} = \text{س}$$

$$\frac{3}{0} = \text{س}$$

اذن احداثيات نقطة التماس هي  $(\frac{4}{0}, \frac{3}{0})$

ميل خط المركزين  $\frac{4}{3} = \frac{0-4}{0-3}$

اذن معادلة المماس المشترك عند نقطة التماس هي :

$$(\frac{3}{0} - \text{س}) \frac{3}{4} - = (\frac{4}{0} - \text{ص})$$

$$\frac{9}{40} + \text{س} \frac{3}{4} = \frac{4}{0} - \text{ص}$$

$$20 \text{ ص} - 16 = 15 \text{ س} + 9$$

$$\text{اذن } 20 \text{ ص} + 15 \text{ س} = 25$$

$$4 \text{ ص} + 3 \text{ س} = 5$$

( يمكن الحصول على المعادلة أيضاً من طرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) )

كما أوضحنا مسبقاً .



### تمارين (٢-٤)

(١) أوجد معادلتين الدائرتين اللتين مركز كل منهما (٢، -٣) وتمسان الدائرة  
 $س^٢ + ص^٢ - ٨س + ١٠ص = ٥$

(٢) أوجد نقطتي تقاطع الدائرتين

$$س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$$

$$س^٢ + ص^٢ - ٢ = ٠$$

وأوجد معادلة الوتر المشترك لهما .

(٣) أثبت أن الدائرتين د<sub>١</sub> = {(س، ص) : س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> - ٢س - ٧ص + ٥ = ٠}

$$د_٢ = {(س، ص) : س^٢ + ص^٢ - ٦س - ٤ص + ٨ = ٠}$$

متقاطعتان على المتعامد وأوجد نقطتي التقاطع ومعادلة الوتر المشترك لهما .

(٤) أثبت أن الدائرتين

$$د_١ = {(س، ص) : س^٢ + ص^٢ - ٤س - ١٠ص + ١٣ = ٠}$$

$$د_٢ = {(س، ص) : س^٢ + ص^٢ - ١٢س - ٢٢ص + ١٢١ = ٠}$$

متماسستان من الخارج وأوجد كلا من نقطة التماس ومعادلة المماس المشترك لهما  
 عند نقطة التماس .

(٥) دائره تمر بالنقطة (أ، ب) وتقطع الدائره س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> = ٢ على التعامد  
 برهن على أن المحل الهندسي لمركز الدائره هو خط مستقيم معادلته

$$٢أ + ٢ب ص = ٣أ + ٢ب + ٢نق$$

(٦) أوجد معادلة الدائره التي تمر بنقطتي تقاطع الدائرتين

$$د_١ = {(س، ص) : س^٢ + ص^٢ - ٦س - ٢ص + ٤ = ٠}$$

$$د_٢ = {(س، ص) : س^٢ + ص^٢ - ٢س - ٤ص - ٦ = ٠}$$

ويقع مركزها على المستقيم ص = س

\*\*\*



## الباب الثالث

# تحويل الإحداثيات - القطع المكافئ

(١-٣) نقل المحاور

(٢-٣) دوران المحاور

(٣-٣) دوران مع انتقال

تمارين (١-٣)

(٤-٣) القطع المكافئ

(٥-٣) الوتر البؤري العمودي

(٦-٣) المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ الناتجة من انتقال المحاور

تمارين (٢-٣)

(٧-٣) معادلتا المماس والعمودي للقطع المكافئ عند أي نقطة عليه

(٨-٣) شرط تماس المستقيم  $ص = م ص + ح$  للقطع المكافئ  $ص^2 = ٤ أ ص$

(٩-٣) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع  $ص^2 = ٤ أ ص$  للنقطة  $(ص_١، ص_١)$

(١٠-٣) معادلة الخط القطبي للنقطة  $(ص_١، ص_١)$  بالنسبة للقطع  $ص^2 = ٤ أ ص$

تمارين (٣-٣)

(١١-٣) تحت المماس وتحت العمودي لمنحنى ما .

(١٢-٣) طول تحت المماس وتحت العمودي لمنحنى ما

(١٣-٣) الخواص الهندسية للقطع المكافئ

(١٤-٣) قطر القطع المكافئ

تمارين (٤-٣)

\*\*\*



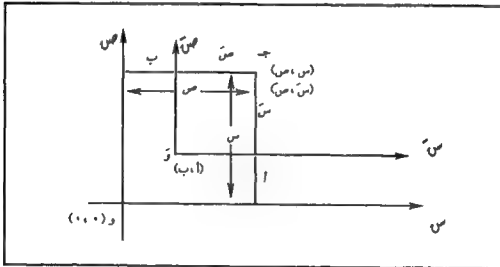
### الباب الثالث

## تحويل الإحداثيات. القطع المكافئ

غالباً ما نحتاج إلى وضع معادلة منحنى ما في الصورة القياسية طبقاً للأسس تحكم هذه الصورة القياسية أو وضع المعادلة في صورة مبسطة يسهل التعامل معها ، ويمكننا تحقيق ذلك بتغيير الإحداثيات الأصلية وهو ما يعرف بتحويل الإحداثيات . وهناك طريقتان رئيسيتان لتحويل الإحداثيات الأولى تعرف بنقل المحاور والثانية تعرف بدوران المحاور . كما يمكننا أن نطبق الطريقتين معاً . وقد رأينا ان نستعرض موضوع تحويل الإحداثيات قبل أن نتطرق لموضوع القطوع المخروطية نظراً لحاجتنا إليه في دراسة هذه القطوع .

### (٣-١) نقل المحاور

ويتم نقل محوري الإحداثيات موازية لنفسها بنقل نقطة الأصل إلى نقطة اختيارية جديدة أو بعبارة أخرى تغيير نقطة الأصل بنقطة اختيارية جديدة بدون تغيير اتجاه المحورين .



شكل (٣-١)

إذا نقلنا نقطة الأصل وإلى نقطة اختيارية جديدة وَ حيث إحداثيات وَ هي (أ، ب) مع بقاء المحورين موازيين للمحورين الأصليين (أنظر شكل ٣-٤١) .

وبما أن إحداثيات النقطة من المستوى يعتمد على وضع محوري الإحداثيات فإن النقطة حـ في شكل (٣-١) التي إحداثياتها (س، ص) بالنسبة إلى المحورين وس، وص يكون إحداثياتها (س'، ص') بالنسبة إلى المحورين وس'، وص' .

$$\begin{aligned} \text{بـ حيث } س &= س' + أ \\ (١) \\ ص &= ص' + ب \end{aligned}$$

هذه المعادلات تعطي إحداثيات النقطة حـ بالنسبة للمحورين وس، وص بدلالة إحداثياتها بالنسبة للمحورين وس'، وص' .

فإذا عوضنا بدلا من س، ص بالقيم س' + أ، ص' + ب على الترتيب في معادلة أي منحن فإننا نحصل على معادلة نفس المنحنى لكنها مسندة إلى المحورين الجديدين وس'، وص' باعتبار نقطة الأصل الجديدة وَ إحداثياتها (أ، ب) .

تعرف مجموعة المعادلات (١) بمعادلات انتقال المحورين من الإحداثيات (س'، ص') إلى الإحداثيات (س، ص) كما تعرف مجموعة المعادلات التالية بمعادلات انتقال المحورين من الإحداثيات (س، ص) إلى الإحداثيات (س'، ص')

$$\begin{aligned} س' &= س - أ \\ (١) \\ ص' &= ص - ب \end{aligned}$$

مثال (٣-١) :

أوجد معادلة المنحنى ٢ س<sup>٢</sup> + ٣ ص<sup>٢</sup> - ٢ ص - ٨ س + ٦ ص = ٧

منسوبة إلى محورين يوازيان المحورين الأصليين مع نقل نقطة الأصل إلى النقطة (٢، -١) .

الحل :

$$\text{بوضع } س = س^2 + ٢ \quad ، \quad ص = ص^2 - ١$$

$$\text{اذن } ٢(س^2 + ٢) + ٣(ص^2 - ١) - ٨(س^2 + ٢) + ٦(ص^2 - ١) = ٧$$

$$٢(س^2 + ٢ + س^2 + ٤) + ٣(ص^2 - ١ + ص^2 - ١) - ٨(س^2 + ٢ + س^2 + ٢) + ٦(ص^2 - ١ + ص^2 - ١) = ٧$$

$$٢س^2 + ٨ + ٢س + ٨ + ٣ص^2 - ٣ - ٦ص + ١٦ - ٨س - ١٦ - ٨س - ١٦ - ٦ص - ٦ = ٧$$

$$\text{اذن } ٢س^2 + ٣ص^2 = ١٨$$

بالقسمة على ١٨

$$١ = \frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{٦}$$

والصورة السابقة هي الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص بحيث الإحداثيات الجديدة هي لمركزه (٠ ، ٠) أي (٢ ، -١) من الإحداثيات الأصلية (وسنوضح ذلك بالتفصيل عند دراستنا للقطع الناقص)

مثال (٣-٢) :

إذا اعتبرنا معادلة الدائرة

$$س^2 + ٢ص^2 + ٢ل + ٢ك = ٠$$

واستخدما إكمال المربع

$$\text{فإن } (س^2 + ٢ل + ٢) - (٢ل + ٢) + (ص^2 + ٢ك + ٢) - (٢ك + ٢) = ٠$$

$$\Leftarrow (س + ل)^2 + (ص + ك)^2 = ٢(ل + ٢) + ٢(ك + ٢) - ٢ = ٢(ل + ك + ٢)$$

وينقل المحاور إلى النقطة (ل- ، ك-) مركز الدائرة تصبح المعادلة

$$(ص - ل + ل) + (ص - ك + ك) = نق^2$$

$$ص^2 + ص^3 = نق^2$$

وواضح أن هذه معادلة دائرة إحداثيا مركزها نقطة الأصل (لأننا نقلنا نقطة الأصل والمحاور الجديدة إلى النقطة (ل - ، ك -) وأصبحت (٠ ، ٠) حسب الإحداثيات الجديدة) .

ومن المثالين السابقين تتضح أهمية نقل المحاور لتبسيط صورته المعادلة لأنه باستخدام الانتقال يمكننا حذف الحدود من الدرجة الأولى في معادلة الدرجة الثانية وذلك بإكمال المربع .

حيث في المثال الأول استطعنا الوصول بصورة القطع الناقص

$$ص^2 + ص^3 - ٨ص + ٦ = ٧$$

إلى الصورة القياسية

$$١ = \frac{ص^2}{٩} + \frac{ص^3}{٦}$$

وأبضا في المثال الثاني استطعنا تغيير صورة الدائرة

$$من ص^2 + ص^3 + ٢ل + ٢ك ص + ح = ٠$$

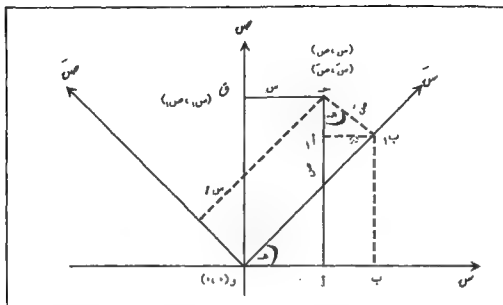
إلى صورة أبسط وهي :

$$ص^2 + ص^3 = نق^2$$

### (٣-٢) : دوران المحاور

كما أوضحنا قبل ذلك فقد أمكننا نقل نقطة الأصل إلى نقطة اختيارية جديدة وبالتالي فنتقل المحاور موازية لنفسها وسنوضح هنا كيف يمكننا إدارة المحاور بزوايا اختيارية هـ .





شكل (٢-٣)

فإذا دارت المحاور بزاوية هـ في الاتجاه الموجب للمحور وس مع بقاء نقطة الأصل ثابتة من الشكل الموضح (٢-٣) نجد أن النقطة حـ التي إحداثياتها (س، ص) بالنسبة إلى المحورين وس، وص لها الإحداثيات (س، ص) بالنسبة إلى المحورين وس، وص

$$\text{إذن } س = |أب| - |أب|$$

$$= |أب| - |أب|$$

$$= س \text{ حـ} - ص \text{ حـ}$$

$$، ص = |أب| + |أب|$$

$$= |أب| + |أب|$$

$$= س \text{ حـ} + ص \text{ حـ}$$

أي أن

$$س = س \text{ حـ} - ص \text{ حـ}$$

(٢)

$$ص = س \text{ حـ} + ص \text{ حـ}$$

وتعرف هذه المجموعة من المعادلات بمعادلات دوران المحاور حول نقطة الأصل من الإحداثيات (س<sup>-</sup>، ص<sup>-</sup>) إلى الإحداثيات (س، ص) بزاوية مقدارها هـ والتي تعرف بزاوية الدوران في الاتجاه الموجب للمحور وس .

ويمكن وضع مجموعة المعادلات (٢) على صورة معادلة مصفوفية

$$(٣) \quad \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{حتاه} & -\text{حاه} \\ \text{حاه} & \text{حتاه} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س}^- \\ \text{ص}^- \end{bmatrix}$$

$$\text{وتعرف المصفوفة د} = \begin{bmatrix} \text{حتاه} & -\text{حاه} \\ \text{حاه} & \text{حتاه} \end{bmatrix} \text{ بمصفوفة الدوران}$$

من الإحداثيات (س<sup>-</sup>، ص<sup>-</sup>) إلى الإحداثيات (س، ص) ومن خواص هذه المصفوفة أنها غير شاذة أي قابلة للانعكاس ومعكوس هذه المصفوفة هو المصفوفة د<sup>-١</sup>

وتعرف هذه المصفوفة بمصفوفة الدوران من الإحداثيات (س، ص) إلى الإحداثيات (س<sup>-</sup>، ص<sup>-</sup>) . وبالتالي فإنه يمكن تكوين معادلات الدوران حول نقطة الأصل من الإحداثيات (س، ص) إلى الإحداثيات (س<sup>-</sup>، ص<sup>-</sup>) على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} \text{س}^- \\ \text{ص}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{حتاه} & -\text{حاه} \\ \text{حاه} & \text{حتاه} \end{bmatrix}^{-١} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س}^- \\ \text{ص}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{حتاه} & \text{حاه} \\ -\text{حاه} & \text{حتاه} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\text{س}^- = \text{س حتاه} + \text{ص حاه} \quad (٤)$$

$$\text{ص}^- = -\text{س حاه} + \text{ص حتاه}$$

تمثل (٤) مجموعة معادلات الدوران من الإحداثيات (س، ص) إلى الإحداثيات (س<sup>-</sup>، ص<sup>-</sup>) .

### (٣-٣) دوران مع انتقال

يتم في هذا الجزء تغيير اتجاهي المحورين ونقطة الأصل معا

إذا نقلنا نقطة الأصل إلى النقطة (أ ، ب) ونقلنا المحاور موازية لنفسها ثم دار المحوران بزاوية هـ وطبقنا الحالتين السابقتين معا فإننا يمكن أن نستنتج أن النقطة جـ في شكل (٣-٣) يكون لها ثلاثة إحداثيات مختلفة بالنسبة لنظم المحاور الثلاثة

$$(وس ، وص) ، (وَسْ ، وَصَ) ، (وَسْ ، وَصَ)$$

هي على الترتيب (س ، ص) ، (س ، ص) ، (س ، ص)

وحيث أن المحورين وَسْ ، وَصْ ناتجة من انتقال المحاور الأصلية وس ، وص إذن معادلات الانتقال هي :

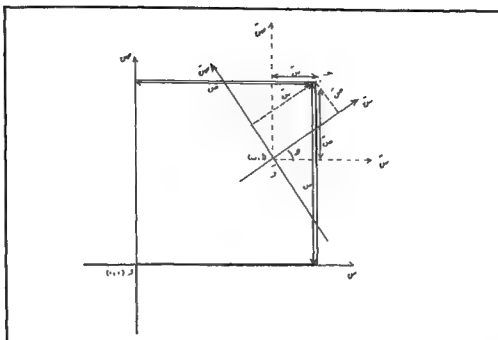
$$\begin{aligned} س &= س' + أ \\ ص &= ص' + ب \end{aligned} \quad (٥)$$

أيضاً المحورين وَسْ ، وَصْ ناتجة عن دوران المحورين بزاوية مقدماها هـ في الاتجاه الموجب لمحور وَسْ إذن معادلات الدوران هي :

$$\begin{aligned} س' &= س \cos هـ - ص \sin هـ \\ ص' &= س \sin هـ + ص \cos هـ \end{aligned} \quad (٦)$$

بالتعويض من المعادلات (٦) في المعادلات (٥) نحصل على المعادلات التي تمثل الدوران مع الانتقال والتي على الصورة .

$$\begin{aligned} س &= س' \cos هـ - ص' \sin هـ + أ \\ ، ص &= س' \sin هـ + ص' \cos هـ + ب \end{aligned}$$



شكل (٣-٣)

وكما ناقشنا أهمية نقل محوري الإحداثيات لتبسيط صورة المعادلة نناقش الآن ومن خلال المثال التالي أهمية الدوران في تبسيط أو تعديل صورة المعادلة حيث يمكننا في المثال الآتي وباستخدام الدوران حذف الحد الذي يحتوي على  $s$  في معادلة الدرجة الثانية .

فكما نعلم أن الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في  $s$  ، هي :

$$As^2 + 2Bs + C = 0$$

ويدارة المحاور بزاوية اختيارية  $\theta$  فإن المعادلة تصبح

$$A(s \cos \theta - y \sin \theta)^2 + 2B(s \cos \theta - y \sin \theta) + C = 0$$

$$+ 2(s \sin \theta + y \cos \theta) + C = 0$$

$$+ 2(s \sin \theta + y \cos \theta) + C = 0$$

ويوضع معامل س ص = صفرأ (لحذف الحد الذي يحتوي على س ص)

$$اذن -٢أ حاه - حتا ه + ٢ م (حتا ه - حاه) + ٢ ب حاه - حتا ه = ٠$$

$$\Leftarrow -٢أ حاه + ٢ م حتا ه + ٢ ب حاه - حتا ه = ٠$$

$$٢ م حتا ه - (٢ ب) حاه = ٢ حتا ه$$

$$\frac{٢ م}{٢ ب} = \frac{٢ حتا ه}{٢ ب}$$

$$\frac{٢ م}{٢ ب} = ٢ حتا ه$$

$$٢ م = ٢ ب \cdot ٢ حتا ه \Rightarrow \frac{٢ م}{٢ ب} = ٢ حتا ه$$

وهذه هي قيمة الزاوية ه التي من المفروض أن يدور بها المحوران حتى يمكن تغيير صورة المعادلة وحذف الحد الذي يحتوي على س ص فيها .

مثال (٣-٣) :

أوجد قيمة الزاوية ه اللازمة لدوران المحورين لحذف الحد الذي يحتوي على

س ص في المعادلة

$$٧ س٢ - ٦\sqrt{٣} س ص + ١٣ ص٢ = ١٦$$

الحل :

نفرض أن الزاوية التي يدور بها المحوران هي هـ

والمحوران الجليديان س، و ص

$$س = س \cdot حتا ه - ص \cdot حاه$$

$$ص = ص \cdot حاه + س \cdot حتا ه$$

تصبح المعادلة

$$٧ (س \cdot حتا ه - ص \cdot حاه) - ٦\sqrt{٣} (ص \cdot حاه + س \cdot حتا ه) + ١٣ (س \cdot حتا ه - ص \cdot حاه) = ١٦$$

$$١٦ + (١٣ \text{ حاه} + \text{ص} \text{ حتاه})^2 = ١٦$$

$$(٧ \text{ حتاه} - \sqrt[3]{٦} \text{ حاه} \text{ حتاه} + ١٣ \text{ حاه}^2) \text{ ص}^2$$

$$+ (١٢ \text{ حاه} \text{ حتاه} - \sqrt[3]{٦} \text{ حتاه} - \text{حاه}^2) \text{ ص}^2 +$$

$$+ (٧ \text{ حاه}^2 + \sqrt[3]{٦} \text{ حاه} \text{ حتاه} + ١٣ \text{ حتاه}^2) \text{ ص}^3 = ١٦ \quad (١)$$

ولحذف الحد الذي يحتوي على  $\text{ص}^3$  نضع معامل هذا الحد = صفراً

$$\text{اذن } ١٢ \text{ حاه} \text{ حتاه} - \sqrt[3]{٦} \text{ حتاه} - \text{حاه}^2 = ٠$$

$$\sqrt[3]{٦} \text{ حاه}^2 = ١٢ \text{ حاه} \text{ حتاه}$$

$$\sqrt[3]{٦} = \frac{١٢ \text{ حاه}}{\text{حتاه}}$$

$$\sqrt[3]{٦} = ١٢$$

$$٦ = ١٠٨$$

$$\sqrt[3]{٦} = ٤.٨$$

إذن يجب إدارة المحاور بزاوية قدرها  $٤.٨$  حتى نستطيع حذف الحد الذي يحتوي

على  $\text{ص}^3$

وتؤول المعادلة (١) إلى

$$\text{ص}^2 \left( -\frac{1}{4} \times ١٣ + \frac{1}{٧} \times \frac{\sqrt[3]{٦}}{٧} \times \sqrt[3]{٦} - \frac{٣}{4} \times ٧ \right)$$

$$+ (٧ \times \frac{1}{4} + \sqrt[3]{٦} \times \frac{1}{٧} \times \sqrt[3]{٦} + \frac{٣}{4} \times ١٣) \text{ ص}^3 = ١٦$$

$$١٦ = ٢ص \left( \frac{٣٩}{٤} + \frac{١٨}{٤} + \frac{٧}{٤} \right) + ٢س \left( \frac{١٣}{٤} + \frac{١٨}{٤} - \frac{٢١}{٤} \right)$$

$$١٦ = ٢ص \frac{٦٤}{٤} + ٢س \frac{١٦}{٤} \Leftrightarrow$$

بالقسمة على ١٦

$$\text{إذن } ٤ = ٢ص + \frac{٢س}{٤}$$

وهذه معادلة قطع ناقص في الصورة القياسية أيضاً كما سنرى فيما بعد عند دراسة القطوع .

\*\*\*

### تمارين (٣ - ١)

(١) أوجد معادلة المنحنى ٣ من  $٤ - ٢$  ص  $٦ + ٢$  ص  $٢٤ +$  ص  $١٣٥ =$

وذلك بنقل محوري الإحداثيات موازيين للمحورين الأصليين إلى النقطة الاختيارية (١ ، ٣) .

(٢) أوجد معادلة المنحنى ٣ من  $٢ + ٢$  ص  $٢ +$  ص  $٢ + ٢$  ص  $٤ -$  ص  $٣ +$  ص  $٠ =$

والناقمة عن إدارة محوري الإحداثيات بزاوية  $٤٥^\circ$

(٣) أثبت أنه لتأخذ المعادلة

$$٥ \text{ ص } ٦ + ٢ \text{ ص } ٥ + \text{ ص } ٤ - ٢ \text{ ص } ٤ + \text{ ص } ٤ - = ٠$$

الصورة القياسية للقطع الناقص

$$٤ = \frac{٢ \text{ ص } ٢}{٢ \text{ ب}} + \frac{٢ \text{ ص } ٢}{١٢}$$

فإنه يجب نقل المحاور إلى النقطة (١ ، ١) وإدارتها بزاوية قدرها  $٤٥^\circ$

ثم أوجد قيمة كلا من أ ، ب .

\*\*\*

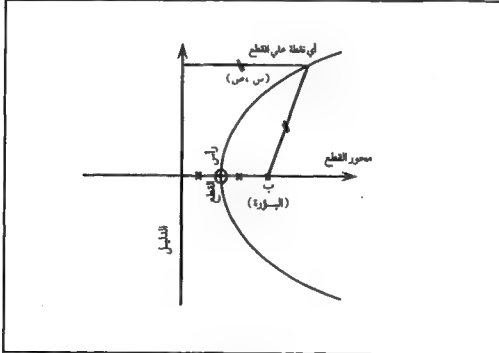


### (٤-٣) القطع المكافئ

قبل دراسة المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ، وكما تعودنا لا بد وأن نتعرف على القطع من الوجهة الهندسية فإذا تحركت نقطة بحيث تكون دائماً متساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن مستقيم ثابت فإنها ترسم منحنيًا نطلق عليه «القطع المكافئ» وأنطلقا من هذا التوضيح فإننا نضع التعريف التالي للقطع المكافئ .

**تعريف :**

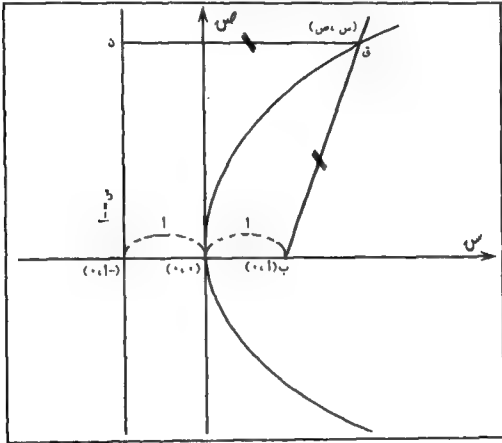
«القطع المكافئ» هو مجموعة جميع النقاط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن مستقيم ثابت وتسمى النقطة الثابتة ببؤرة القطع ويسمى المستقيم الثابت بالدليل ويسمى المستقيم المار بالبؤرة وعمودياً على الدليل بمحور القطع وتسمى نقطة تقاطع المحور مع القطع برأس القطع أنظر شكل (٤-٣) .



شكل (٤-٣)

### المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ :

«مسندة الى محوره كمحور أفقي والمماس عند الرأس كمحور رأس» والتي تعرف بالصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ .



شكل (٥-٣)

من شكل (٥-٣) نحدد أن

$$(٠, ٠) \equiv \text{نقطة الرأس}$$

$$(١, ١) \equiv \text{ونفرض أن البؤرة}$$

يكون الدليل س = -١

(لأن بعد الرأس (٠, ٠) عن البؤرة = بعد الرأس عند الدليل = ١)

فإذا كانت النقطة التي إحداثياتها (س ، ص) أي نقطة على القطع المكافئ

من تعريف القطع المكافئ  $|ق ب| = |ق ن|$

ويستخدم قانوني البعد وطول العمود الساقط من نقطة على مستقيم

$$\sqrt{(س-١)^2 + ص^2} = \frac{|س+١|}{\sqrt{١+١}}$$

بتربيع الطرفين

$$(س-١)^2 + ص^2 = |س+١|^2$$

$$س^2 - ٢س + ١ + ص^2 = س^2 + ٢س + ١$$

$$(١) \quad ص^2 = ٤س$$

هي معادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (٠ ، ٠) ويؤثرته (٠ ، ١)

ودليله  $س = -١$

ملاحظات :

١- محور الصادات مماس للقطع عند الرأس .

٢- لا توجد أي نقطة حقيقية للقطع على يسار محور الصادات .

٣- القطع متماثل بالنسبة لمحور السينات .

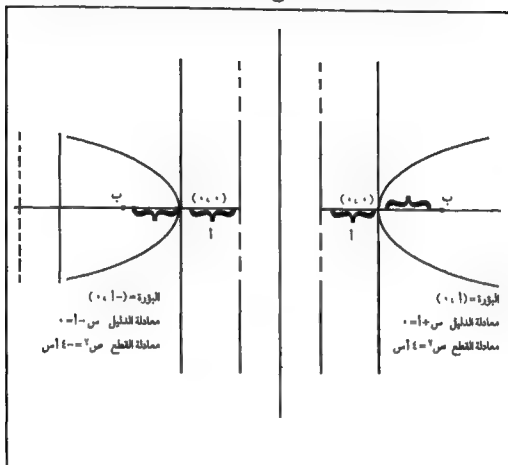
٤- منحنى القطع يمتد غير محدود في الربعين الأول والرابع .

وتعرف المعادلة (١) بالصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ولكن هناك صوراً

قياسية مختلفة بناء على موضع القطع بالنسبة للمحاور وفي شكل (٣-٦) وشكل

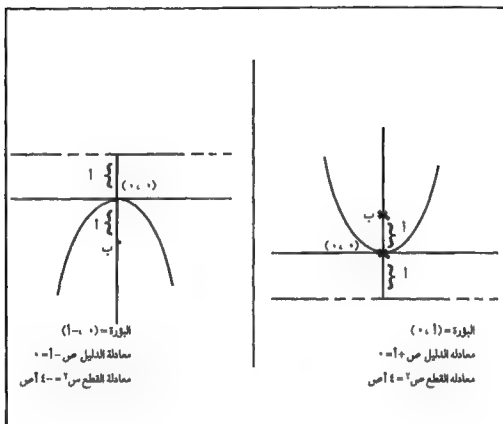
(٣-٧) نوضح بيانياً هذه الصورة المختلفة وإيضاً معادلات هذه الصور المختلفة .

الصور المختلفة لمعادلة القطع المكافئ بالنسبة لمحوري الإحداثيات  
(محور السينات هو محور القطع ، محور الصادات هو المماس عند الرأس)



شكل (٣-٦)

(محور الصادات هو محور القطع ، محور السينات هو المماس عند الرأس)



شكل (٧-٣)

مما سبق ومن الصور الأربعة السابقة (شكل (٦-٣) ، شكل (٧-٣)) نلاحظ أنه إذا كانت معادلة القطع المكافئ على الصورة ص = 2 -  
أص فإن :

- ١ - إذا كانت أموجبة (أ > ٠) فإن فتحة القطع إلى اليمين ومحوره هو محور السينات .
- ٢ - إذا كانت أمسالبة (أ < ٠) فإن فتحة القطع إلى اليسار ومحوره هو محور السينات أيضاً .

أما إذا كانت معادلة القطع المكافئ على الصورة . ص = 2 -  
أص فإن

- ١- إذا كانت أموجية ( $0 < \lambda$ ) فإن فتحة القطع إلى أعلى ومحوره محور الصادات .  
 ٢- إذا كانت أسالبة ( $0 > \lambda$ ) فإن فتحة القطع إلى أسفل ومحوره الصادات أيضاً .

### (٣-٥) الوتر البؤري العمودي

يعرف في هذا الجزء بعض التعاريف التي تلقي المزيد من الضوء على القطع المكافئ .

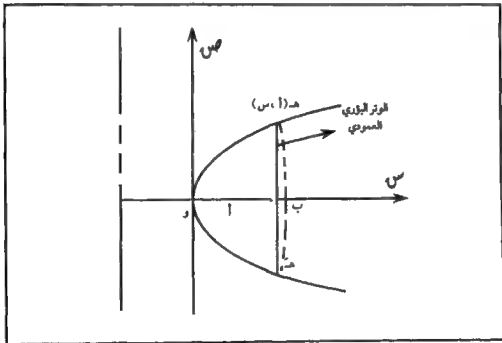
تعريف : نعرف المستقيم الواصل بين أي نقطتين على القطع وغير منطبقتين بوتر القطع .

تعريف : يعرف أي وتر للقطع ويمر بالبؤرة بالوتر البؤري .

تعريف : إذا كان وتر القطع عمودياً على محور القطع فإنه يعرف بالوتر العمودي .

تعريف : إذا كان وتر القطع يمر بالبؤرة وعمودي على محور القطع فإنه يعرف بالوتر البؤري العمودي للقطع .

نتيجة : طول الوتر البؤري العمودي للقطع المكافئ  $ص = ٢ = ٤ أ س$  هو ٤ أ



شكل (٣-٨)

## البرهان :

واضح من الرسم أن المستقيم هـ هـ هو الوتر البؤري العمودي للقطع  
(ير بالبؤرة ب وعمودي على المحور و س)

وهو مستقيم // محور الصادات ويبعد عنه مسافة = أ

إذن معادلته هي س = أ

إذن إحداثيات النقطة هـ = (أ ، ص)

إذن إحداثيات النقطة هـ = (أ ، -ص)

بما أن هـ تقع على القطع

إذن تحقق معادلته  $\Leftrightarrow$  ص<sup>2</sup> = أ<sup>2</sup> - أ × أ

ص<sup>2</sup> = أ<sup>2</sup> - أ<sup>2</sup>

$\Leftrightarrow$  ص = ٠

طول الوتر البؤري العمودي = ٢ ص

$٢ \times ١٢ = ٢٤$

## (٣-٦) المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ الناتجة من انتقال المحاور

في استنتاجنا للمعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ ص<sup>2</sup> = أ<sup>2</sup> - أ س أسندناها إلى محورين أحدهما هو محور القطع (واعتبرناه المحور السيني) والآخر هو المماس عند الرأس (اعتبرناه المحور الصادي) وبالتالي فإن رأس القطع هو النقطة (٠ ، ٠) والآن ماذا لو لم يكن محورا الإسناد هما محوري القطع والمماس عند الرأس على الترتيب وللإجابة على هذا السؤال نأخذ المعادلة التالية :

(ص - ك) = أ<sup>2</sup> - أ (س - هـ)

فسنجد أن هذه المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً لأنه باستخدام نقل المحاور (السابق دراسته) بأن ننقل نقطة الأصل إلى النقطة (هـ ، ك) مع عدم تغيير اتجاه المحورين فإن :

$$س = س' + هـ$$

$$ص = ص' + ك$$

وتأخذ المعادلة الصورة

$$(ص' + ك - ك') = ٢ \text{ أ } (س' + هـ - هـ)$$

$$ص' = ٢ \text{ أ } س'$$

وهذه هي الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ويكون رأسه هو نقطة الأصل الجديدة المنقول إليها المحاور وهي (هـ ، ك) .

ملاحظات : مما سبق نلاحظ أنه إذا كان القطع المكافئ في الصورة السابقة

$$(ص - ك) = ٢ \text{ أ } (س - ل) \text{ فإن}$$

١- رأسه هي النقطة (ل ، ك)

٢- طول وتره البؤري العمودي ٢ أ

٣- محوره يوازي محور السنيات ويبعد عنه مسافة = ك

أي أن معادلة محور القطع  $س = ك$  .

٤- المماس عند الرأس يوازي محور الصادات ويبعد عنه مسافة = ل

∴ معادلة المماس عند الرأس هي  $س = ل$

٥- بؤرة القطع هي النقطة (ل + أ ، ك)

٦- معادلة الدليل هي  $س = ل - أ$

وعلى ذلك فإن جميع المعلومات السابقة يمكن إيجادها

إذا أمكن تحويل معادلة القطع المكافئ إلى الصورة

$$(ص - ك) = ٢ \text{ أ } (س - ل)$$



وهذه الملاحظات ضرورية جداً للاستعانة بها في تمثيل منحني القطع بيانياً كما ستعرض لذلك فيما بعد .

أما الوصول إلى هذه الصورة من صورته أخرى لأي معادلة تمثل قطع مكافئ فإن يتم باستخدام الطرق والمهارة الجبرية كما سيرد ذلك في الأمثلة التالية .

مثال (٣-٤) :

إدرس معادلة القطع المكافئ ص<sup>٢</sup> = ١٦ س ثم مثله بيانياً

الحل : من معادلة القطع

$$\text{ص}^2 = 16 \text{ س}$$

بمقارنة هذه المعادلة بالصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ص<sup>٢</sup> = ٤ أ س

$$16 = 4 \text{ أ}$$

$$4 = \text{أ} \Leftarrow$$

ومن الملاحظات السابق ذكرها نجد أن :

١- رأس القطع هو نقطة الأصل (٠ ، ٠)

٢- متمائل حول محور السنيات

٣- المماس عند الرأس هو محور الصادات

٤- معادلة الدليل س + ٤ = ٠

٥- فتحة القطع إلى اليمين

٦- بؤرة القطع هي النقطة (٤ ، ٠)

٧- طول الوتر البؤري العمودي = ١٦

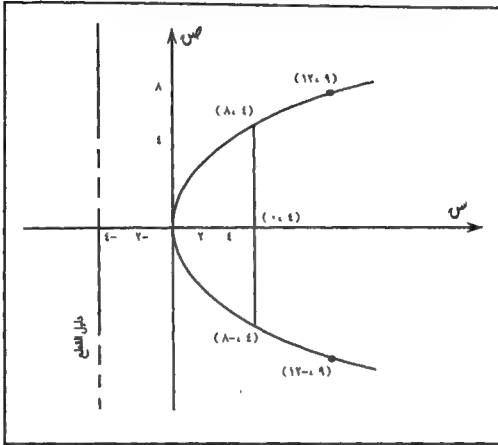
٨- إحداثيات طرفي الوتر البؤري العمودي

$$(٨ ، ٤) ، (٨ ، -٤)$$

٩- ليس هناك أي نقط حقيقية للقطع على يسار محور الصادات

١٠- القطع يمتد بلا حدود في الربعين الأول والرابع

١١- ويمكن الحصول على نقط مساعدة بوضع  $s = 9$  فإن  $v = 12$   
 وباستخدام النتائج السابقة يمكننا تمثيل القطع المكافئ بيانياً كما يلي :



شكل (٣-٩)

مثال (٣-٥) :

أوجد معادلة القطع الذي يوتره  $(\frac{4}{3}, 0)$

ومعادلة دليله  $s = \frac{4}{3}$  ثم أوجد طول وتره البؤري العمودي .

الحل :

واضح أن معادلة القطع في الصورة  $s^2 = 4av$

(رأسه نقطة الأصل حيث بعدها عن البؤرة = بعدها عن الدليل)

$$\frac{4-s}{3} = 1 \quad \text{س}^2 = 4 \text{ ص}$$

$$\text{س}^2 = 4 \times \frac{4-s}{3} \text{ ص}$$

$$\Leftrightarrow \text{س}^2 = \frac{16-s}{3} \text{ ص}$$

$$\frac{16}{3} = |4| = \text{طول الوتر البؤري العمودي}$$

مثال (٣-٦) :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته هي النقطة (٦ ، ٢)

ودليله هو المستقيم  $\ell = \{ (س ، ص) : \text{س} - ٢ = ٠ \}$

الحل :

نفرض نقطة هـ (س ، ص) تقع على القطع

من تعريف القطع

$\therefore |هـ ب| = \text{طول العمود الساقط من هـ على الدليل}$

$$\sqrt{\frac{(س-٢)^2 + (ص-٢)^2}{١+١}} = \sqrt{\frac{(س-٢)^2 + (ص-٢)^2}{٢}}$$

بالتربيع

$$(س-٢)^2 + (ص-٢)^2 = (س-٢)^2 + (ص-٢)^2$$

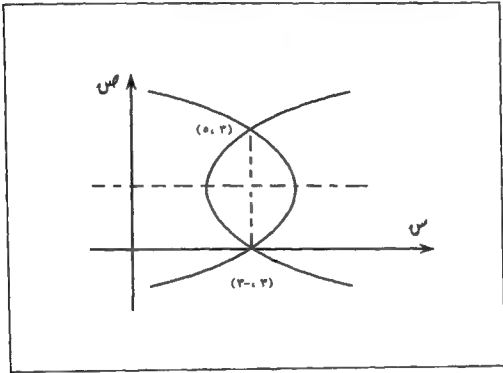
$$\text{س}^2 - ٤س + ٤ + \text{ص}^2 - ٤ص + ٤ = \text{س}^2 - ٤س + ٤ + \text{ص}^2 - ٤ص + ٤$$

$$\Leftrightarrow \text{ص}^2 + ٤ = \text{س}^2 + ٨$$

هي معادلة القطع المطلوبة

مثال (٣-٧) :

أوجد القطع المكافئ الذي طرفاوتره البؤري العمودي هما  $(٣, ٣)$  ،  $(٥, ٣)$  .



شكل (٣-١٠)

الحل :

$$\text{طول الوتر البؤري العمودي} = ٨ = (٣ - ٥)$$

$$٢ = ١ \Leftarrow ٨ = ١٤$$

وواضح أن محور القطع يوازي محور السينات .

إذن معادلة القطع هي  $(س - ك)٢ = ٨(س - ل)$

بما أن النقطتان  $(٥, ٣)$  ،  $(٣, ٣)$  تحققان معادلة القطع

$$-١٨٤ =$$

$$(1) \quad (5 - ك) \pm 8 = (3 - ل) \quad (1)$$

$$(2) \quad (3 - ك) \pm 8 = (3 - هـ) \quad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن

$$(5 - ك) = (3 - ل)$$

$$\text{إذن } 5 - ك = 3 - ل$$

$$2 = ك$$

$$ك = 1$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$8 \pm (3 - ل) = 16$$

$$3 - ل = 2 \quad \text{أو} \quad 3 - ل = 2$$

$$ل = 1 \quad \text{أو} \quad ل = 5$$

إذن رأس القطع (1 ، 1) أو (5 ، 1)

إذن هناك قطمان يمكن أن يحققا المطلوب

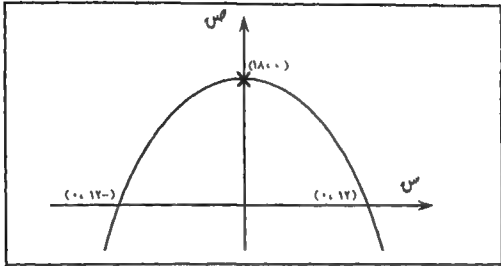
$$\text{معادلة الأول هي } (ص - 1) \pm 8 = (1 - س) \Leftrightarrow 2 - ص + 8 = 1 - س \quad 9 = 9 + 0$$

$$\text{ومعادلة الثاني هي } (ص - 1) \pm 8 = (5 - س) \Leftrightarrow 2 - ص + 8 = 5 - س \quad 0 = 39 - 8 + 2 - ص$$

مثال (3 - 8) :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (0 ، 18) ويمر بالنقطتين

$$(12 ، 0) ، (-12 ، 0)$$



شكل (١١-٣)

الحل :

معادلة القطع في الصورة

$$(س - ل)٢ = ٤(ص - ك)$$

بما أن رأس القطع هي النقطة  $(١٨، ٠)$

إذن معادلة القطع هي

$$(س - ١٨)٢ = ٤(ص - ١٨)$$

بما أن القطع يمر بالنقطة  $(٠، ١٢)$

$$(١٨ - ٠)٢ = ٤(١٢ - ص)$$

$$١٨ - \times ٤ = ١٤٤$$

$$٢ - = ١$$

وبالتالي تكون معادلة القطع هي :

$$س - = ٢(ص - ١٨)$$

مثال (٣ - ٩) :

ارسم القطع المكافئ

$$س^٢ - ٢س + ٢ = ٣$$

الحل :

باكمال المربع

$$(س^٢ - ٢س + ١) - ١ + ٢ = ٣$$

$$(س - ١)^٢ = ٢$$

وينقل المحاور إلى النقطة (١ ، ٢) تصبح المعادلة

$$س^٢ - ٢س = ٢$$

$$اذن ٢ = ٤$$

$$\frac{1}{٢} = ١$$

وهي معادلة قطع مكافئ فيه :

١ - محوره رأسي

٢ - مفتوح إلى أسفل

٣ - رأسه هي النقطة (١ ، ٢)

٤ - متمائل حول المحور الرأس س = ١

٥ - المماس عند الرأس هو المستقيم س = ٢

٦ - بؤرة القطع (١ ،  $\frac{3}{٢}$ )

٧ - دليل القطع هو المستقيم س =  $\frac{5}{٢}$

٨- طول الوتر البؤري العمودي  $2$

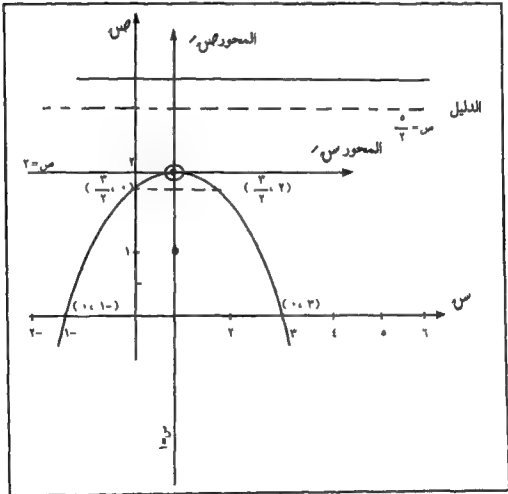
٩- إحداثيات نهايتا الوتر البؤري العمودي  $(-\frac{3}{4}, 2)$  ،  $(\frac{3}{4}, 0)$

١٠- نقط تقاطع القطع مع محور السينات (بوضع  $s = 0$ )

$$(0, 1-), (0, 3)$$

١١- نقط تقاطع القطع مع محور الصادات (بوضع  $s = 0$ )

وهي إحدى طرفي الوتر البؤري العمودي .  $(-\frac{3}{4}, 0)$

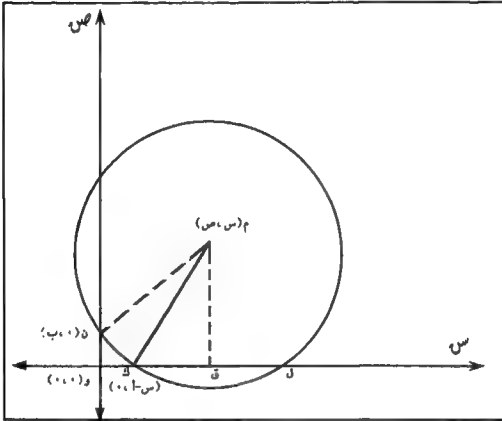


شكل (٣-١٢)



مثال (۳-۱۰) :

اثبت أن الحل الهندسي لمركز الدائرة التي تقطع وترًا طوله ١٢ من محور السينات وتمر بالنقطة (٠، ب) هي قطع مكافئ رأسه النقطة (٠،  $\frac{ب}{٢} - \frac{٢}{ب}$ ) وطول وتره البؤري العمودي = ٢ ب



شکل (۳-۱۳)

**الحل :**

نفرض أن احدائياً مركز الدائرة هو (س ، ص)

من الرسم (شكل ٣-١٣)

كل = ١٢ فرضاً

$$ك ق = أ$$

ولكن وق = س

$$وك = س - أ$$

إذن إحداثيات النقطة ك هي (س - أ ، ٠)

ام ك = ا | م ن | (أنصاف أقطار في الدائرة)

$$\sqrt{(س - ٠)^2 + (ص - ب)^2} = \sqrt{[س - (١ - س)]^2 + (ص - ٠)^2}$$

بتربيع الطرفين نحصل على

$$س^2 + ص^2 - ٢ ب ص = ب^2 + أ^2 + ص^2$$

$$\Leftarrow س^2 - ٢ ب ص + أ^2 = ب^2$$

$$\Leftarrow س^2 = ٢ ب ص + (ب^2 - أ^2)$$

$$\Leftarrow س^2 = ٢ ب \left( \frac{ب^2 - أ^2}{٢ ب} + ص \right)$$

وهذه معادلة قطع مكافئ رأسه هو النقطة (٠ ،  $\frac{ب^2 - أ^2}{٢ ب}$ )

وبالتالي يكون المحل الهندسي لمركز الدائرة هو قطع مكافئ رأسه هي النقطة

$$(٠ ، \frac{ب^2 - أ^2}{٢ ب})$$

\*\*\*

### تمارين (٣-٢)

(١) أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة وكذلك طول الوتر البؤري العمودي للقطع المكافئ

$$ص٢ - ٤ ص - ٤ ص + ١٦ = ٠$$

(٢) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٢ ، ٢) ودليله هو المستقيم

$$٣ ص + ٢ ص = ٦$$

أوجد كذلك إحداثي رأس القطع وطول وتره البؤري العمودي .

(٣) أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة لقطع المكافئ

$$ص٢ + ٤ ص + ٤ ص + ١٦ = ٠$$

(٤) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، ٢) وأوجد معادلة دليله .

(٥) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٢ ، ٠) ودليله محور الصادات .

(٦) أثبت أن المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن مستقيم ثابت مساوياً لطول المماس المرسوم منها لدائرة ثابتة هو قطع مكافئ .

(٧) أثبت أن معادلة القطع المكافئ الذي تقع رأسه وبؤرته على محور السينات وتبعدان عن نقطة الأصل مسافة ١ ، أعلى الترتيب هي

$$ص٢ = ٤ (١ - ١) (ص - ١) .$$

(٨) ارسم القطع المكافئ

$$ص - ٤ ص - ٢ ص + ١٠ = ٠$$

(٧-٣) معادلتا المماس والعمودي للقطع المكافئ عند أي نقطة تقع عليه

لايجاد معادلتا المماس والعمودي للقطع المكافئ نفرض أن :

معادلة القطع في الصورة القياسية  $x^2 = 4ay$  أس

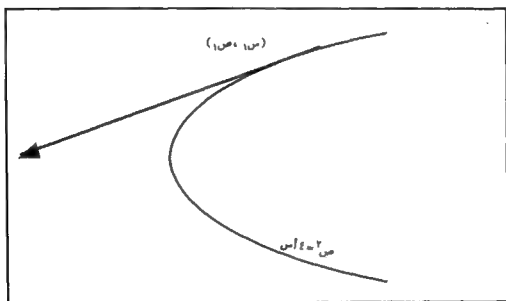
فإذا فرضنا نقطة على القطع مثل  $(x_1, y_1)$

بإيجاد المشتقة الأولى لمعادلة القطع نحصل على

$$2x = \frac{4a}{y}$$

$$2x_1 = \frac{4a}{y_1}$$

$$\frac{2x_1}{y_1} = \left| \frac{dy}{dx} \right|_{(x_1, y_1)} = m \quad \text{ولكن } m =$$



(١٤-٣)

ويستخدم صورة الميل ونقطة على المستقيم تكون معادلة المماس هي :

$$y - y_1 = \frac{2x_1}{y_1} (y - y_1)$$

$$\text{ص ص}_1 - \text{ص}_1^2 = \text{ص}_1^2 - \text{ص}_1 \text{أ}_2$$

$$\text{ص ص}_1 - \text{ص}_1^2 = \text{ص}_1 \text{أ}_2 - \text{ص}_1 \text{أ}_2$$

$$\text{ص ص}_1 = \text{ص}_1 \text{أ}_2 + \text{ص}_1 \text{أ}_2$$

$$(1) \quad \text{ص ص}_1 = \text{ص}_1 (\text{أ}_2 + \text{أ}_2)$$

وهذه هي معادلة المماس المطلوب

ولإيجاد ميل العمودي على المماس عند نفس النقطة (ص<sub>1</sub> ، ص<sub>1</sub>)

$$\frac{\frac{1}{\text{ص}_1}}{\frac{1}{\text{ص}_1}} = \text{م} \quad \text{بما أن ميل المماس}$$

$$\frac{\frac{1}{\text{ص}_1}}{\frac{1}{\text{ص}_1}} = \text{م} \quad \text{إذن ميل العمودي على المماس}$$

$$(2) \quad \text{إذن معادلة العمودي هي ص - ص}_1 = \text{م} (\text{ص} - \text{ص}_1)$$

$$\text{ص - ص}_1 = \text{ص}_1 \frac{\frac{1}{\text{ص}_1}}{\frac{1}{\text{ص}_1}} (\text{ص} - \text{ص}_1)$$

$$\text{أ}_2 - \text{ص}_1 = \text{ص}_1 - \text{ص}_1 \text{ص}_1 + \text{ص}_1 \text{ص}_1 \text{ص}_1 \text{هي معادلة العمودي المطلوبة}$$

$$\frac{\frac{1}{\text{ص}_1}}{\frac{1}{\text{ص}_1}} = \text{م} (\text{ميل العمودي})$$

$$(3) \quad \text{ص}_1 = \text{أ}_2 - \text{م}$$

$$\text{ولكن ص}_1^2 = \text{أ}_2^2$$

$$(4) \quad \text{ص}_1 = \frac{\text{أ}_2^2 - \text{م}^2}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ص}_1^2 - \text{م}^2}{\text{أ}_2}$$

بالتعويض من (3) ، (4) في (2) نجد أن

$$\text{ص} + \text{أ}_2 = \text{م} (\text{ص} - \text{أ}_2)$$

$$\text{ص} = \text{م} \text{ص} - \text{أ}_2 \text{م} - \text{أ}_2^2 \text{حيث م هو ميل العمودي .}$$

### ملاحظة هامة :

إذا أخذنا أي قيمة للنقطة (س ، ص) وعوضنا في معادلة العمودي السابقة فإنه ينتج معادلة من الدرجة الثالثة في م أي أن هناك ثلاث قيم لميل العمود وهذا يدل على أنه يمكن رسم ثلاث أعمدة حقيقية من نقطة ما (غير واقعة على القطع) للقطع المكافئ .

(٣-٨) شرط تماس المستقيم ص = م س + ح للقطع المكافئ ص = ٢ - ٤ أس :

بالتعويض عن ص من معادلة المستقيم في معادلة القطع نجد أن

$$(م س + ح) = ٢ - ٤ أس$$

$$م٢ س٢ + ٢ م س ح + ح٢ - ٤ أس = ٠$$

$$م٢ س٢ + ٢ م س (٢ - ٤ أس) + ص + ح٢ - ٤ أس = ٠ \quad (١)$$

والمعادلة (١) هي معادلة من الدرجة الثانية في س

إذن لها جذران أي تعطي نقطتين لتقاطع المستقيم والقطع

وبما أن المستقيم ممس القطع

إذن نقطتا التقاطع تنطبقا ويصبح جذرا المعادلة منطبقان وشرط تطابق جذار

المعادلة أن يكون مميزها = ٠

$$\text{بما أن المميز} = ب^٢ - ٤ أ ج = ٠ \quad \text{حيث}$$

$$أ = م٢ ، ب = ٢ م (٢ - ٤ أس) ، ج = ح٢ - ٤ أس$$

$$\text{إذن المميز} = ٤ (م (٢ - ٤ أس) - ٢ م٢ (٢ - ٤ أس) + م٢ (٢ - ٤ أس) = ٠$$

$$٤ (م٢ - ٨ م أس + ٤ م أس - ٨ م أس + ٤ م أس + ٤ م أس - ٨ م أس + ٤ م أس) = ٠$$

$$٤ (٤ م أس - ٨ م أس + ٤ م أس + ٤ م أس - ٨ م أس + ٤ م أس + ٤ م أس - ٨ م أس + ٤ م أس) = ٠$$

$$٤ (٤ م أس - ٨ م أس + ٤ م أس) = ٠$$

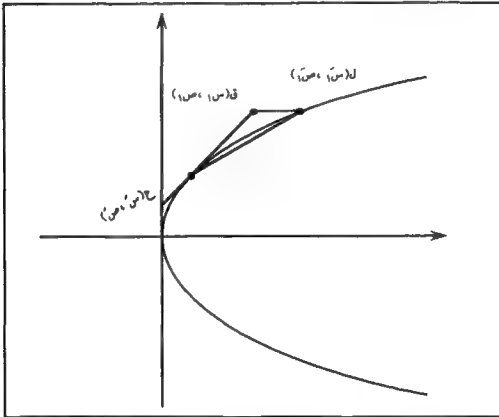
$$\text{إذن } \frac{1}{ج} = م \text{ أو } ج = \frac{1}{م}$$

هو شرط التماس المطلوب

ويكون المستقيم

ص = م س +  $\frac{1}{م}$  مماسا للقطع المكافئ ص =  $\epsilon^2$  أس لجميع قيم م الحقيقية

(٩-٣) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع المكافئ ص =  $\epsilon^2$  أ س  
لنقطة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>)



شكل (٣-١٥)

قبل أن نستنتج معادلة وتر التماس دعنا نتعرف على المعنى الهندسي لوتر التماس للنقطة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) بالنسبة للقطع ص =  $\epsilon^2$  أ س

(تماما كما في الدائرة) فإذا رسم مماسان من النقطة  $ق_1$  ( $س_1$ ،  $ص_1$ )  
 للقطع المكافئ  $ص^2 = ٤أس$  حيث يقابلان في النقطتين  $ق^*$  ( $س^*$ ،  $ص^*$ ) ،  
 $ق^*$  ( $س^*$ ،  $ص^*$ ) فإن الوتر  $ق^* ق^*$  هو وتر التماس المقصود  
 بما أن  $ق^* ق^*$  مماس للقطع

إذن معادلته هي  $ص ص_1 = ٢(س + س_1)$  (١)

بما أن  $ق^* ق^*$  مماس للقطع أيضا إذن معادلته هي  $ص ص_1 = ٢(س + س_1)$  (٢)

ولكن كلا من هذين المماسين يمران بالنقطة ( $س_1$ ،  $ص_1$ )

إذن من (١)  $ص_1 ص_1 = ٢(س_1 + س_1)$  (٣)

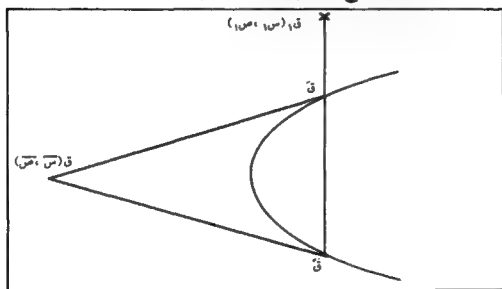
، من (٢)  $ص_1 ص_1 = ٢(س_1 + س_1)$  (٤)

وبالتالي فإن معادلة وتر التماس الذي يمر بالنقطة ( $س^*$ ،  $ص^*$ ) ،  
 $(س^*$ ،  $ص^*$ ) هي

$$ص ص_1 = ٢(س + س_1)$$

(٣-١٠) معادلة الخط القطبي للنقطة ( $س_1$ ،  $ص_1$ )

بالنسبة للقطع المكافئ  $ص^2 = ٤أس$



شكل (٣-١٦)



سبق لنا تعريف الخط القطبي لنقطة بالنسبة للدائرة والآن نعرف الخط القطبي بالنسبة للقطع المكافئ ص<sup>٢</sup> = ٤ أس

إذا رسمنا من ق<sub>١</sub> قاطعا للقطع بحيث يقطعه في النقطتين ق<sup>٢</sup>، ق<sup>٣</sup> ثم رسمنا المماسين للقطع عند النقطتين ق<sup>٢</sup>، ق<sup>٣</sup> بحيث يتقاطعان في النقطة ق

فإن المحل الهندسي للنقطة ق هو خط مستقيم يسمى بالخط القطبي للنقطة ق<sub>١</sub>

وهذا معناه أن النقطة ق تتحرك بحيث يمر وتر الماس لها ق<sup>٢</sup> ق<sup>٣</sup> بنقطة ثابتة هي ق<sub>١</sub>

وبتعبير آخر فإن الخط القطبي للنقطة ق هو مجموعة جميع النقط التي يمر وتر تماسها بالنسبة للقطع المكافئ بنقطة ثابتة ق<sub>١</sub> ولايجاد معادلة الخط القطبي .

فإن معادلة وتر التماس هي ص<sup>٢</sup> = ٢(س + س<sup>٢</sup>)

ولكن النقطة ق<sub>١</sub> تقع على وتر التماس إذن تحقق معادلته

وبالتالي فإن ص<sub>١</sub><sup>٢</sup> = ٢(س<sub>١</sub> + س<sub>١</sub><sup>٢</sup>)

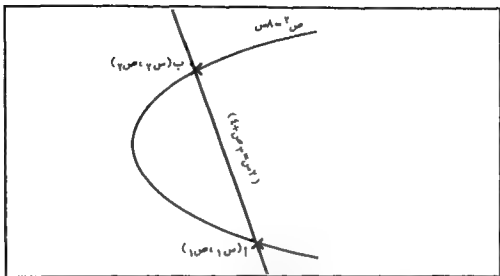
إذن المحل الهندسي للنقطة ق هو ص<sub>١</sub><sup>٢</sup> = ٢(س + س<sub>١</sub>)

وهذا معادلة الخط القطبي للنقطة ق<sub>١</sub>

مثال (٣ - ١٦)

أوجد طول الوتر الذي يقطعه القطع المكافئ ص<sup>٢</sup> = ٨ س من المستقيم

$$٢س + ٣ص + ٤ = ٠$$



شكل (٣-١٧)

الحل :

نفرض أن نقطتي تقاطع المستقيم والقطع هما  $A(1, 1)$  ،  $B(4, 2)$  مس = ٢

إذن المطلوب طول الوتر  $\overline{AB}$

$$\text{من معادلة المستقيم} \quad \text{إذن مس} = \frac{4 - \text{مس}^2}{3}$$

بالتعويض في معادلة القطع نجد أن

$$\text{مس} = \sqrt{\frac{4 + \text{مس}^2}{3}}$$

$$\text{مس} = \frac{16 + \text{مس}^2 + 16}{9}$$

$$4\text{مس} = 16 + \text{مس}^2 + 16$$

$$0 = 16 + \text{مس}^2 - 56\text{مس}$$

$$0 = 4 - \text{مس}^2 + 14\text{مس}$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية لها جذرين هما  $s_1$  ،  $s_2$

(١) بحيث :  $s_1 + s_2 = 14$  ،  $s_1 s_2 = 48$

وأيضاً من معادلة المستقيم  $s^2 - 14s + 48 = 0$

$$s = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \times 48}}{2}$$

بالتعويض في معادلة القطع نجد أن

$$s = \frac{14 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$s = 12 \text{ ص} \text{ أو } s = 2 \text{ ص}$$

$$s = 12 \text{ ص} + 16 = 28 \text{ ص}$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية لها جذران  $s_1$  ،  $s_2$

(٢) بحيث :  $s_1 + s_2 = 12$  ،  $s_1 s_2 = 16$

$$\sqrt{(s_1 - s_2)^2} = \sqrt{(s_1 + s_2)^2 - 4s_1 s_2}$$

$$\sqrt{(s_1 - s_2)^2} = \sqrt{12^2 - 4 \times 16}$$

$$\sqrt{(s_1 - s_2)^2} = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80}$$

(لإكمال المربع)

$$\sqrt{(s_1 - s_2)^2} = \sqrt{(s_1 + s_2)^2 - 4s_1 s_2}$$

بالتعويض من (١) ، (٢) نجد أن

$$\sqrt{(12 \times 4 - 16 \times 4) + (28 \times 4 - 16 \times 4)} = \sqrt{16}$$

$$\sqrt{64 - 144 + 112 - 196} =$$

$$\sqrt{260} = \sqrt{80 - 340} =$$

$$2 = \sqrt{65} \text{ وحده طول}$$

مثال (٣-١٧) :

أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للقطع المكافئ

$$\text{ص}^2 - ٣\text{ص} + ٢ = ٩ \quad \text{عند النقطة } (٤, ١)$$

$$\text{ميل المماس للمنحنى عند النقطة } (١, \text{ص}_١) = \left| \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \right|_{(١, \text{ص}_١)}$$

$$٠ = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} ٢ + ٣ - \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \text{ص} \quad \text{بإجراء التفاضل لمعادلة القطع نحصل على}$$

$$٣ = (١ + \text{ص}) \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\frac{٣}{(١ + \text{ص})} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\frac{٣}{٤} = \frac{٣}{(١ + \text{ص})} = \left| \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \right|_{(١, ١)} = ٣$$

$$\text{ميل المماس} = \frac{٣}{٤} \quad \text{وعبر النقطة } (٤, ١)$$

$$\text{إذن معادلة المماس هي } (١ - \text{ص}) \frac{٣}{٤} = (٤ - \text{س})$$

$$٤ - \text{ص} - ٣ = ٤ - \text{س}$$

$$٠ = ٨ + \text{ص} - ٣$$

$$\text{ميل العمودي} = -\frac{٣}{٤}$$

$$\text{إذن معادلة العمودي } (١ - \text{ص}) - \frac{٤}{٣} = (٤ - \text{س})$$

$$٣ - \text{ص} - ٤ = ٤ - \text{س}$$

$$٠ = ١٩ - \text{ص} + ٣$$

مثال (٣- ١٨) :

إذا كان المستقيم  $s + ص = ك$  يمس القطع المكافئ  $ص - س - س^٢ = ٠$   
فأوجد قيمة  $ك$

الحل :

من معادلة المستقيم  $ص = ك - س$   
بالتعويض في معادلة القطع

$$٠ = ٢س - س - (ك - س)$$

$$٠ = ٢س - س - ك$$

$$٠ = ٢س + ٢س - ك$$

وهذا معادلة من الدرجة الثانية في  $س$  لها جذران

وكي يمس المستقيم القطع لابد وأن يميز هذا المعادلة يساوي صفراً

$$\Delta - ٢ - ٤ أ ج = ٠$$

$$\Delta - ٤ - ٤ \times - ك = ٠$$

$$\Delta - ك = ٤$$

$$١ - ك = ١$$

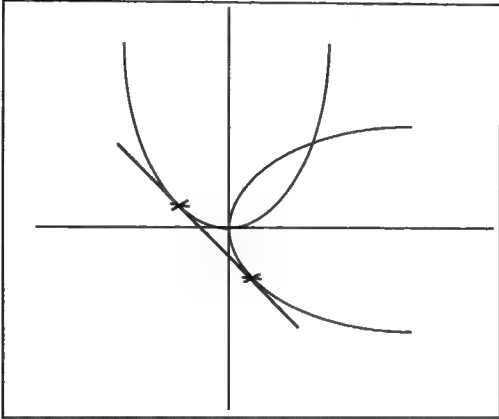
إذن الشرط اللازم لكي يمس المستقيم  $ص + س = ك$

$$٠ = ٢س - س - س^٢$$

$$١ - ك = ١$$

مثال (٣-١٩) :

أوجد معادلة المماس المشترك للقطعين  $\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^3$  ،  $\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^3$  ص  
وكذلك نقطتي التماس وطول المماس المشترك



شكل (٣-١٨)

الحل :

معادلة المماس للقطع الأول هي  $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}^2 + \mathcal{C}^3$  (من شرط التماس)

معادلة المماس للقطع الثاني هي  $\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}^1 + \mathcal{C}^3$  (من شرط التماس)

بما أن المماس مشترك

إذن لتتطابق المعادلتان لابد أن تتناسب المعاملات

$$(1) \quad \frac{r_b}{r_m} / \frac{r_1}{r_m} = \frac{r^-}{1} = \frac{1}{r_m^-}$$

، من المعادلة (1)

$$\frac{r_1 r_m^-}{r_b r_m} = \frac{1}{r_m^-}$$

$$r_b r_m = r_1 r_m^-$$

$$(2) \quad \frac{r_1 r_m^-}{r_b} = r_m^-$$

إذن

وأيضاً من المعادلة (1)

$$\frac{r_m^-}{r_b} \times \frac{r_1}{r_m} = r_m^-$$

$$(3) \quad r_1 r_m^- = r_b r_m$$

بالتعويض من (2) في (3)

$$r_1 r_m^- = r_b \times \frac{r_1 r_m^-}{r_b}$$

$$r_b r_1 r_m^- = r_1 r_m^-$$

$$r_b r_m^- = r_1 r_m^-$$

$$\frac{r_b r_m^-}{r_1} = r_m^-$$

$$(2) \quad \frac{r_b r_m^-}{r_1} = r_m^-$$

إذن

$$\frac{r_b}{r_1} = r_m^-$$

فإن

إذن معادلة المماس المشترك هي

$$ص - \frac{1}{ب} س - ٢١ = ٠$$

$$ومن هنا : ب ص - س = ٢١$$

$$٠ = ٢١ + ب ص - س$$

وتكون إحداثيا نقطة التماس للقطع الأول هي

$$س_١ = \frac{٢١}{ب} = ٢١$$

$$ص_١ = \frac{٢١}{ب} = ٢١$$

$$\equiv (٢١، ٢١) \text{ نقطة التماس الأولى هي}$$

وإحداثيات نقطة التماس الثانية

$$س_٢ = \frac{٢١}{ب} = ٢١$$

$$ص_٢ = \frac{٢١}{ب} = ٢١$$

$$= \sqrt{٢(٢١-٢١) + ٢(٢١-٢١)} \text{ ويكون طول المماس}$$

$$= \sqrt{٢١ + ٢١} = ٢١$$

مثال (٣ - ٢٠) :

من النقطة (٥، ٢) رسم مماسان للقطع المكافئ

$$ص - ٢ س - ٤ = ٠$$



أوجد :

- ١ - نقطتي التماس .
- ٢ - معادلة المماس عند كل نقطة من نقط التماس .
- ٣ - طول وتر التماس .

الحل :

بما أن معادلة المنحنى هي  $ص^2 - ص - ٢س + ٤ = ٠$

بإجراء التفاضل إذن  $ص^2 - \frac{دص}{دس} - \frac{دص}{دس} = ٢ - ٢$

وبالتالي فإن ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة  $= \frac{دص}{دس} = \frac{٢}{١-ص}$

فإذا كانت نقطة التماس هي  $(س_١، ص_١)$

$$\frac{٢}{١-ص_١} = ٢ \quad \text{إذن}$$

وتكون معادلة المماس هي  $(ص - ٢) = \frac{٢}{١-ص_١}(س - س_١)$

بما أن النقطة  $(س_١، ص_١)$  تقطع على كل من المنحنى (١) والمماس (٢) إذن تحقق كلا من المعادلتين

$$ص_١^2 - ص_١ - ٢س_١ + ٤ = ٠ \quad \text{ويكون}$$

$$(ص_١ - ٢) = \frac{٢}{١-ص_١}(س_١ - س_١)$$

وبحل المعادلتين (٢)، (٤) معاً يتيج أن :

$$س_١ = ١٧، \quad ص_١ = ٥$$

$$س_١ = ٦، \quad ص_١ = -٢ \quad \text{ومنها}$$

أي أن نقطتي التماس هما  $(١٧، ٦)$ ،  $(٥، -٢)$

### تمارين (٣-٣)

(١) أوجد قيمة  $\theta$  التي تجعل المستقيم  $\text{كس} - \text{ص} = ٥ = ٠$

مماساً للقطع المكافئ  $\text{ص} = ٣ + ٢\text{ك} + ٤$

(٢) أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ

$\text{ص} = ٣ - ٢\text{ك} + ٢\text{ص} + ٩ = ٠$  عند النقطة  $(٤, ١)$

(٣) أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ  $\text{ص} = ٢ + ٧\text{ك}$  والذي يوازي المستقيم

$٤\text{ك} - \text{ص} = ٣ + ٠$  وأوجد إحداثيات نقطة التماس

(٤) أثبت أن المستقيم  $\text{ص} + \text{ك} = ١$  ممس للقطع المكافئ  $\text{ص} = \text{ك} - ٢$

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودي عند كل من طرفي الوتر البؤري العمودي للقطع

المكافئ  $\text{ص} = ٢ + ٤(١ - \text{ك})$

(٦) أثبت أن مماس القطع المكافئ  $\text{ص} = ٢ + ٤\text{ك}$  أس عند النقطة  $(١, \text{ص}_١)$

عمودي على مماس القطع عند النقطة  $(\frac{٢}{١}, \frac{٢}{١})$  ،  $(\frac{٢}{١}, \frac{٢}{١})$

(٧) أوجد معادلة المماسين المرسومين من النقطة  $(٣ - , ٢ -)$  للقطع المكافئ

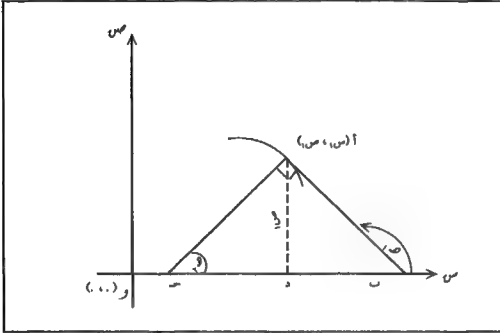
$\text{ص} = ٢ + ٤\text{ك}$  وأوجد إحداثيات نقطة التماس

(٨) أثبت أن أي مماس للقطع المكافئ يقطع الدليل وامتداد الوتر البؤري العمودي في

نقطتين متساويتي البعد عن البؤرة .

\*\*\*

(١١ - ٣) تحت المماس وتحت العمود لمنحنى ما



شكل (٣-١٩)

شكل (٣-١٩) أ ب مماس للمنحنى عند النقطة أ ( $s_1, v_1$ ) يلاقي محور السينات في النقطة ب ،  
 أ ج العمودي على المماس عند نفس النقطة أ ( $s_1, v_1$ ) يلاقي محور السينات عند النقطة ج

ب د هو مسقط المماس أ ب على محور السينات ج د هو مسقط العمود أ ج على محور السينات أيضا

يسمى ب د بتحت التماس عند النقطة ( $s_1, v_1$ )  
 ، ويسمى ج د بتحت العمود عند النقطة ( $s_1, v_1$ )

(٣-١٢) طول تحت المماس ونحت العمود لاي منحنى

من شكل (٣-٩) نلاحظ أن

$$\frac{ح د}{ص_١} = - طتا ه_١$$

$$\frac{١}{٢} = - \frac{ح د}{ص_١}$$

$$ج د = - \frac{ص_١}{٢}$$

$$\text{طول تحت المماس} = \frac{ص_١}{م} \text{ وياعتبار أن } م = \left| \frac{د ص}{د س} \right| (س_١، ص_١)$$

$$\text{إذن طول تحت المماس} = - \frac{ص_١}{\left| \frac{د ص}{د س} \right|} / (س_١، ص_١)$$

ولإيجاد طول نحت العمود :

$$\frac{ح د}{ص_١} = - طتا ه_٢$$

$$= - طتا (ه_١ - ٩٠)$$

$$= طتا ه_١$$

$$= م$$

$$ج د = ص_١ م \quad \text{طول تحت العمود} = ص_١ م$$

$$\text{أي طول تحت العمود} = ص_١ \left| \frac{د ص}{د س} \right| (س_١، ص_١)$$

مثال (٣-٢١) :

أوجد طول تحت المماس وتحت العمود للقطع المكافئ

ص ٢-٦ ص ٨- ص ٣١-٠ عند النقطة (٣-، ١-)

الحل :

يأجراء التفاضل بالنسبة لمعادلة القطع نحصل على

$$٢ \text{ ص } \frac{د \text{ ص}}{د \text{ ص}} - ٦ - \frac{د \text{ ص}}{د \text{ ص}} = ٨ - ٠$$

بالقسمة على ٢

$$٤ = \frac{د \text{ ص}}{د \text{ ص}} (٣-)$$

$$\frac{٤}{٣-} = \frac{د \text{ ص}}{د \text{ ص}}$$

$$١ - = \frac{٤}{٤-} = \frac{٤}{٣-١-} = (١-، ٣-)$$

$$\left| \frac{د \text{ ص}}{د \text{ ص}} \right| / ١ \text{ ص } - = \text{إذن طول تحت المماس}$$

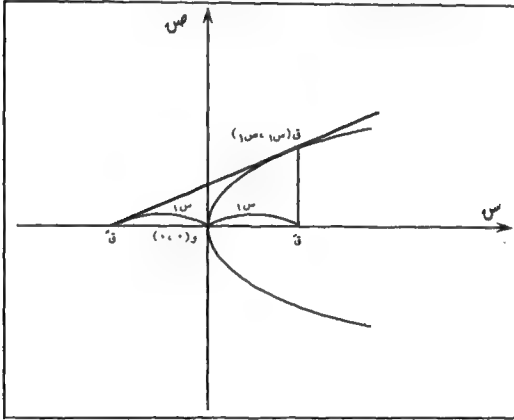
$$١ - = \frac{(١-)-}{١-} =$$

$$\left| \frac{د \text{ ص}}{د \text{ ص}} \right| / ١ \text{ ص } = \text{وطول تحت العمود}$$

$$١ = ١ - \times ١ - =$$

### (٣-١٣) الخواص الهندسية للقطع المكافئ

في هذا الجزء سوف نستعرض بعض الخواص الهندسية للقطع المكافئ  
أولاً : رأس القطع المكافئ ينصف تحت المماس لأي نقطة على القطع



شكل (٣-٢٠)

البرهان

إذا كانت معادلة القطع  $ص = ٢ \epsilon \text{ س}$

فإن معادلة المماس له عند النقطة ق (س١, ص١) هي

$$ص = ١ \text{ ص} = ٢ \epsilon (س + س١) \quad (١)$$

والمماس يقطع محور السينات الذي معادلته  $x = 0$  في النقطة  $Q'$

بوضع  $x = 0$  في (١)

$$0 = x_1 + y_1$$

$$y_1 = -x_1$$

$$AQ' = |x_1|$$

$$\text{ولكن } |OQ'| = |x_1|$$

$$\text{إذن } |AQ'| = |OQ'|$$

أي أن  $O$  تنصف تحت المماس  $Q'Q$  وهو المطلوب

ثانياً : طول تحت المماس لأي نقطة على القطع المكافئ يساوي ضعف الإحداثي

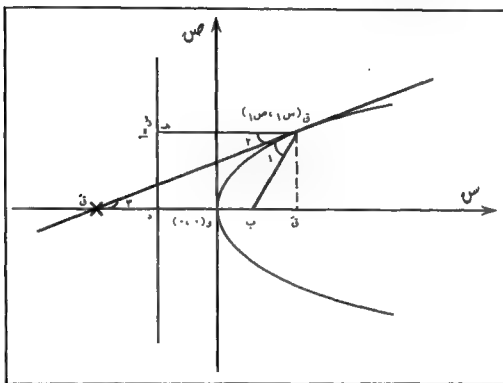
السيني للنقطة

البرهان :

من الخاصية الأولى نلاحظ أن

$$|AQ'| = |x_1| = x_1 + y_1 = 2y_1 \text{ وهو المطلوب}$$

ثالثاً : المحاسن عند أي نقطة على القطع متساوي الميل على الوتر البؤري العمودي على الدليل



شکل (۳-۲۱)

المطلوب في شكل (٣- ٢١) إثبات أن قياس  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}$

**البرهان :**

اَقْوَا = اَوْقَا من الخاصية الاولى

اوب ا = و دا

بالجمع اقّ وا + اوب = اقّ وا + اودا

قُب = قَد

قُ = ق هـ

ق' ب = ق ب



إذن المثلث ق ب ق متساوي الساقين

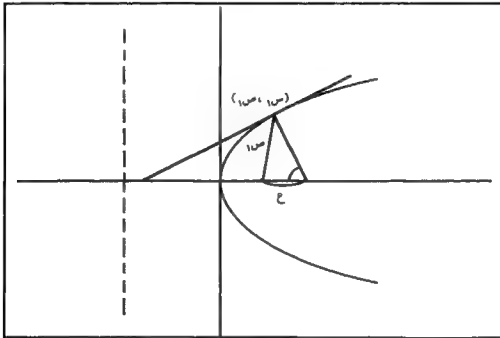
$$\hat{3} = \hat{1} \text{ أي أن}$$

$$\hat{2} = \hat{3} \text{ ولكن بالتبادل}$$

$$\hat{2} = \hat{1} \text{ إذن وهو المطلوب}$$

وللخاصية السابقة أهمية كبيرة في الإضاءة إذا أن القطع المكافئ إذا دار حول محوره يولد سطحاً فإذا وضعنا مصدراً ضوئياً عند بؤرة القطع فإن جميع الأشعة المنعكسة من السطح المعقول من الداخل تكون موازية للمحور ولهذا السبب تصنع المصابيح الكشافية من مثل هذه السطوح الدوارانية

رابعاً : طول تحت العمود لأي نقطة على القطع يساوي طول نصف الوتر البؤري العمودي أي يساوي كمية ثابتة



شكل (٣-٢٢)

البرهان :

ص<sup>٢</sup> = أ<sup>٤</sup> ص ياجراء التفاضل

$$\text{إذن } ٢ \text{ ص} \cdot \frac{د \text{ ص}}{د \text{ س}} = أ^٤$$

$$\text{ص} \cdot \frac{د \text{ ص}}{د \text{ س}} = أ^٢$$

وعند النقطة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>)

$$\text{فإن } \text{ص}_١ \cdot \frac{د \text{ ص}}{د \text{ س}} = أ^٢$$

وبما أن طول تحت العمود لأي منحنى عند (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) = ص<sub>١</sub> ·  $\frac{د \text{ ص}}{د \text{ س}}$

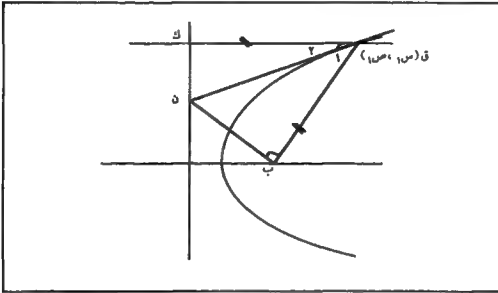
(سبق دراسته في أول البند)

إذن طول تحت العمود = أ<sup>٢</sup>

= طول نصف الوتر البؤري العمودي

= مقدار ثابت

خامساً : في القطع المكافئ جزء المماس المحصور بين نقطة التماس والدليل يقابل زاوية قائمة عند البؤرة



شكل (٣-٢٣)

البرهان :

في القطع المكافئ  $ص٢ = ٤ أ س$

نفرض النقطة ق (س١, ص١)

ونفرض أن المماس ق ن يقابل الدليل في النقطة ن

في المثلثين ق ب ن ، ق ك ن

ق ب = ق ك (من تعريف القطع)

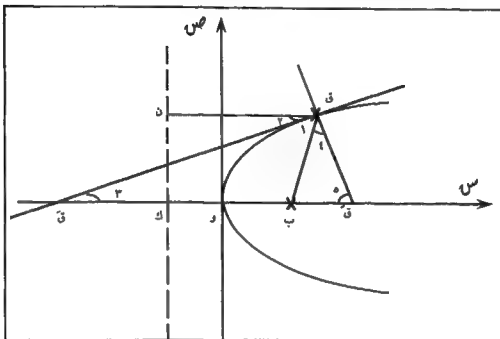
والزاوية المحصورة  $\hat{أ} = \hat{ب}$

(المماس ينصف الزاوية المحصورة بين البعد البؤري للنقطة والمستقيم المار بالنقطة موازياً لمحور القطع) .

إذن ينطبق المثلثان ويتبع أن

ق ب ن = ق ك ن قائمة وهو المطلوب

سادساً : البعد البؤري لنقطة ما على القطع يساوي كلاً من بعدي البؤرة عن نقطتي تقاطع المماس والعمودي مع محور القطع



شكل (٣-٢٤)

في القطع المكافئ ص ٢ = ٤ أ س

ق ق' مماس للقطع عند النقطة ق

ق ق'' العمودي على المماس عند النقطة ق

المطلوب إثبات أن ق ب = ق' ب = ق'' ب

البرهان :

خواص المماس للقطع  $\hat{٢} = \hat{١}$

بالتبادل  $\hat{٣} = \hat{٢}$

إذن  $\hat{٣} = \hat{١}$

أي أن المثلث  $ب ق ق'$  متساوي الساقين

إذن  $ب ق = ب ق'$  (١)

ولكن  $\hat{ه} = \hat{ه'}$

أي أن المثلث  $ب ق ق'$  متساوي الساقين

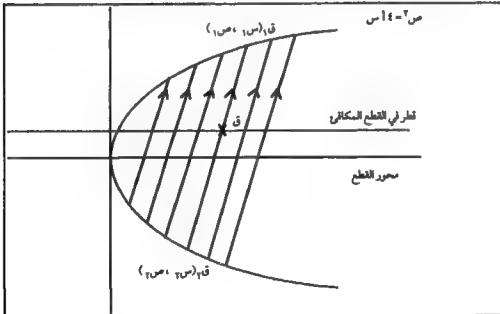
إذن  $ب ق = ب ق'$  (٢)

من (١)، (٢) نجد أن  $ب ق = ب ق' = ب ق'$  وهو المطلوب

### (١٤ - ٣) قطر القطع المكافئ

تعريف :

إذا رسمنا مجموعة من الأوتار المتوازية للقطع المكافئ  $ص ٢ = ٤ أ س$  ذات الميل المشترك  $م$  فإن جميع منتصفات هذه الأوتار تقع على خط مستقيم واحد يوازي محور القطع ويسمى بقطر في القطع المكافئ أو بعبارة أخرى قطر القطع هو مجموعة جميع نقاط منتصفات مجموعة متوازية من الأوتار مرسومة في القطع المكافئ والرسم التالي يوضح هذا التعبير .



شكل (٣ - ٢٥)

### نظرية (٣-١)

في القطع المكافئ  $ص^2 = ٤ أ س$  تكون منتصفات أي مجموعة من الأوتار المتوازية تقع على مستقيم واحد هو قطر في القطع المكافئ بحيث يكون هذا القطر موازيا لمحور القطع ويبعد عنه مسافة  $\frac{١٢}{٢}$

(حيث م هو الميل المشترك لمجموعة الأوتار المتوازية)

البرهان :

نفرض أحد هذه الأوتار  $ق_١ ق_٢$  حيث  $ق_١ \equiv (س_١, ص_١)$   
 $ق_٢ \equiv (س_٢, ص_٢)$  ،

(١)  $ق_١$  تقع على القطع أي أن  $ص_١^2 = ٤ أ س_١$

(٢)  $ق_٢$  تقع على القطع أي أن  $ص_٢^2 = ٤ أ س_٢$

من (١)، (٢) بالطرح نحصل على

$$ص_١^2 - ص_٢^2 = ٤ أ س_١ - ٤ أ س_٢$$

$$(ص_١ - ص_٢)(ص_١ + ص_٢) = ٤ أ (س_١ - س_٢)$$

$$\frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} = \frac{ص_١ + ص_٢}{س_١ + س_٢} = \frac{١٢}{٢}$$

$$\frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} = \frac{١٢}{٢} \Leftrightarrow \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} = م$$

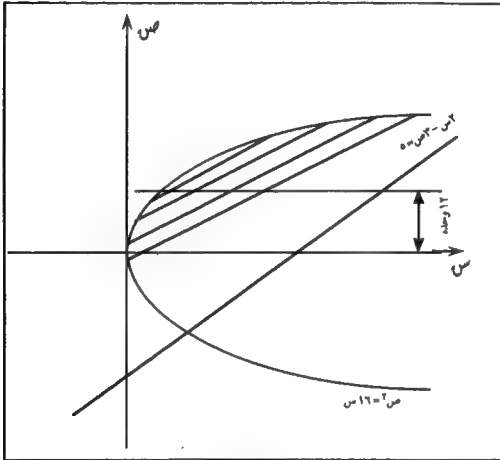
وحيث إن م ثابتة

إذن الحل الهندسي لمنتصفات جميع الأوتار المتوازية ذات الميل المشترك م هو

مستقيم يوازي محور القطع ويبعد عنه مسافة  $\frac{١٢}{٢}$  وهو المطلوب

مثال (٣- ٢٢)

أوجد معادلة قطر القطع المكافئ  $ص = ١٦ - ٢$  والذي ينصف جميع الأوتار التي توازي المستقيم  $٢ - ٣ = ٥$



شكل (٣- ٢٦)

ميل المستقيم  $٢ - ٣ = ٥$

$$٢ - ٣ = ٥ = م$$

وهذا هو الميل المشترك لجميع الأوتار المتوازية

بما أن القطر بوازي محور القطع (محور السينات)

ويبعد عن المحور بمقدار  $\frac{12}{m}$  (نظرية)

$$، \quad \text{و} \quad a = 4$$

$$\text{ويبعد القطر عن المحور} = \frac{11 \times 2}{\frac{2}{3}} = 12 \text{ وحده}$$

إذن القطر // محور السينات ويبعد عنه مسافة قدرها ١٢ وحده

إذن معادلته هي  $x = 12$



## تمارين (٣ - ٤)

### (عامّة على القطع المكافئ)

(١) أوجد الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤري العمودي ومعادلة الدليل والمحور ومعادلة المماس عند الرأس لكل من القطوع التالية

$$أ - ص^2 = ٣ + ٦$$

$$ب - ص^2 - ٢ ص + ١٠ = ٤$$

$$ج - ٣ ص^2 + ٩ ص + ٤ = ٠$$

(٢) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ويمر بالنقط (٣، ٣)، (٦، -٣)، (٥، ٦) ثم أوجد رأس القطع وبؤرته ودليله .

(٣) بوابة على شكل قوس من قطع مكافئ فإذا كان ارتفاعها ٢٥ قدوما وعرض قاعدتها ٤٠ قدم أوجد ارتفاع البوابة عن كل من النقطتين التي تبعد كل منهما عن منتصف القاعدة بمقدار ٨ أقدام

(٤) مصباح كشاف في سيارة على شكل مجسم القطع المكافئ الدوراني فإذا كان طول فتحة المقطع = ١٠ بوصة وأكبر عمق له ٦ بوصات فأوجد البعد البؤري للكشاف

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودي للقطع المكافئ  $ص^2 - ٤ ص = ٠$  عند النقطة (٢، ١)

(٦) أوجد طول تحت المماس وتحت العمود للمنحنى  $ص^2 = ٣ + ٢ ص$  عند النقطة (٢، -٤)

(٧) أثبت أن المماسين للقطع المكافئ ص<sup>٢</sup> = ٤ أ س عند طرفي أي وتر في القطع المكافئ يتقاطعان على القطر النصف لهذا الوتر .

(٨) إثبت أن العمود الساقط من البؤرة على المماس للقطع المكافئ ص<sup>٢</sup> = ٤ أ س يقع على محور الصادات

(٩) أوجد معادلة قطر القطع المكافئ ص<sup>٢</sup> = ٨ س الذي ينصف الأوتار ذات

$$\text{الميل المشترك} = \frac{2}{3}$$

(١٠) أوجد معادلة قطر القطع ص<sup>٢</sup> - ٤ س - ٢ ص + ٦ = ٠

والذي ينصف مجموعة الأوتار التي لها ميل مشترك =  $\frac{2}{3}$

(١١) إذا قُبل مماس القطع ص<sup>٢</sup> = ٤ أ س المحور في قَ والمماس عند الرأس في قَ فأوجد الحل الهندسي للنقطة قَ

(١٢) تتحرك قلبيفة في مستور رأس مبتدئة من نقطة الأصل بحيث كانت إحداثيتها بعد زمن قلده ن هي

$$س = ١٢ ن ، ص = ١٤٤ ن - ١٦ ن^٢$$

برهن على أن المسار هو قطع مكافئ محوره رأسي وأوجد مدى القلبيفة على المستوى الأفقي وأكبر ارتفاع تصل إليه القلبيفة .

## الباب الرابع

### القطع الناقص - القطع الزائد

#### أولاً القطع الناقص

(٤ - ١) معادلة القطع الناقص

(٤ - ٢) الاختلاف المركزي .

(٤ - ٣) الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الناقص

(٤ - ٤) تعيين الاختلاف المركزي اذا عملت معادلة القطع .

(٤ - ٥) معادلة القطع الناقص الناتجة من انتقال المحاور .

(٤ - ٦) تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص

تمارين (٤ - ١)

(٤ - ٧) معادلتا المماس والعمودي للقطع الناقص عند نقطة عليه

(٤ - ٨) شروط تماس المستقيم  $ص = م س + ح$

$$\text{للقطع الناقص } ١ = \frac{ص^2}{٢١} + \frac{ص^2}{٢٢}$$

(٤ - ٩) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع الناقص  $١ = \frac{ص^2}{٢١} + \frac{ص^2}{٢٢}$

لنقطة  $(س١، ص١)$

(٤ - ١٠) معادلة الخط القطبي بالنسبة للقطع الناقص

$$١ = \frac{ص^2}{٢١} + \frac{ص^2}{٢٢} \text{ للنقطة } (س١، ص١)$$

تمارين (٤ - ٢)

(٤ - ١١) طول تحت المماس وتحت العمودي للقطع الناقص عند النقطة

(س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) .

(٤ - ١٢) الخواص الهندسية للقطع الناقص

(٤ - ١٣) قطر القطع الناقص

تمارين (٤ - ٣)

### ثانياً : القطع الزائد

(٤ - ١٤) معادلة القطع الزائد

(٤ - ١٥) الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الزائد

(٤ - ١٦) معادلة القطع الزائد الناتجة من انتقال المحاور .

(٤ - ١٧) تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد .

(٤ - ١٨) معادلتا المماس والعمودي للقطع الزائد عند نقطة عليه

(٤ - ١٩) شرط تماس المستقيم ص = م ص + ح للقطع الزائد  $1 = \frac{ص^2}{ص_1} - \frac{م^2}{م_1}$

(٤ - ٢٠) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع الزائد  $1 = \frac{ص^2}{ص_1} - \frac{م^2}{م_1}$  للنقطة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) .

(٤ - ٢١) معادلة زوج المستقيمان المماسين المرسومين من النقطة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) .

(٤ - ٢٢) الخواص الهندسية للقطع الزائد .

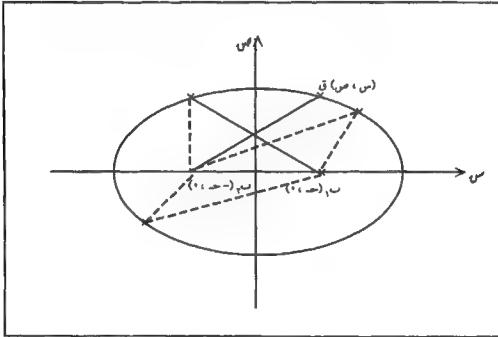
تمارين (٤ - ٤)

## الباب الرابع

### القطع الناقص - القطع الزائد

#### أولاً : القطع الناقص

قبل أن نستنتج الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص علينا أن نتعرف عليه من الوجهة الهندسية



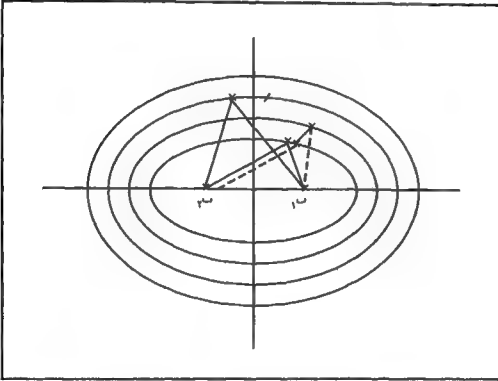
شكل (٤-١)

فإذا تحركت نقطة مثل ق (س ، ص) بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتين ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub> يساوي مقدار ثابت دائماً فإنها ترسم منحنى كما هو مبين بالشكل (٤ - ١) نطلق عليه ما يسمى بالقطع الناقص وانطلاقاً من ذلك فإنه يمكن أن نضع له التعريف التالي

### تعريف :

إذا فرضنا نقطتين ثابتتين ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub> في مستو الإحداثيات فإن مجموعة جميع النقاط التي يكون مجموع بعدي كل منها عن ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub> مقداراً ثابتاً هي قطع ناقص بؤرتيه هما النقطتان ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub>

أي أن جميع نقاط القطع الناقص الموضح بالشكل (٤ - ١) تحقق العلاقة  
 $|ق ب_١| + |ق ب_٢| = ٢ أ$  حيث أ مقدار ثابت

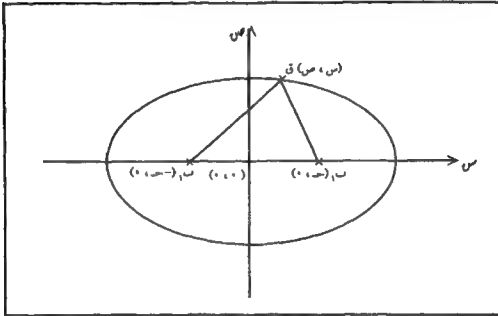


شكل (٤ - ٢)

وواضح إن تغيرت قيمة أ فإن القطع يتغير رغم ثبوت البؤرتين  
 مجموعة القطاعات الناقصة الموضحة بالشكل (٤ - ٢) تتحد في البؤرتين  
 ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub> ولكنها تختلف جميعاً في قيمة أ والتي يعرف ضعفها (٢ أ) ثابت  
 مجموع البعدين البؤريين لأي نقطة على القطع الناقص

#### (٤ - ١) معادلة القطع الناقص

ولتعيين معادلة القطع الناقص بمعلومية البؤرتين  $ب_1 \equiv (٠, ح)$  ،  $ب_2 \equiv (٠, -ح)$  ، وثابت مجموع البعدين البؤريين لأي نقطة على القطع وليكن ١٢



شكل (٤-٣)

بفرض النقطة  $ق (س, ص)$  أي نقطة على منحنى القطع اذن من تعريف القطع الناقص نحدد أن  $|ق ب_1| + |ق ب_2| = ١٢$

$$١٢ = \sqrt{س^2 + (ص-ح)^2} + \sqrt{س^2 + (ص+ح)^2}$$

$$\sqrt{س^2 + (ص-ح)^2} - ١٢ = -\sqrt{س^2 + (ص+ح)^2}$$

بتربيع الطرفين

$$(س + ح)^2 + ص^2 = ١٤ - ١٤ = ١٤ - (س^2 + (ص-ح)^2) - (س^2 + (ص+ح)^2)$$

[illegible]

بترميم الطرفين

$$\begin{aligned} (ح-أ)^2 &= (أ-ح)^2 = [(أ-ب) + (ب-ح)]^2 \\ &= أ^2 - 2أب + ب^2 + 2ب^2 - 2بأ + ح^2 \\ &= أ^2 - 2أب + 3ب^2 - 2بأ + ح^2 \\ &= أ^2 - 2أب + 3ب^2 - 2أب + ح^2 \\ &= أ^2 - 4أب + 3ب^2 + ح^2 \\ &= (أ-2ب+ح)^2 \end{aligned}$$

$$1 = \frac{r_{\text{ص}}}{r_{\text{ج}} - r_{\text{ج}}} + \frac{r_{\text{ص}}}{r_{\text{ج}}}$$

یوضع ۲۱ - ح۲ = ب۲

### تصبح معادلة القطع

$$1 = \frac{r_{\text{مس}}}{r_{\text{ل}}} + \frac{r_{\text{مس}}}{r_{\text{ل}}}$$

وتعرف هذه المعادلة بالصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص .

وواضح أنه إذا علمت معادلة القطع الناقص في الصورة

$$1 = \frac{r_{\text{ص}}}{r_{\text{ج}}} + \frac{r_{\text{س}}}{r_{\text{ف}}}$$

فإن مركز القطع هو (٠، ٠) و



كما يمكن إيجاد بؤرتيه اذا علمت قيمة  $ح$  حيث بؤرتي القطع هما

$$ب_1 (ح، ٠)، ب_2 (-ح، ٠)$$

$$\text{ولتعيين } ح \text{ من الفرض أن } ح^2 = ٢١ - ٢٢$$

$$\text{إذن } ح^2 = ٢٢ - ٢٢$$

$$\sqrt{٢٢ - ٢١} = ح \text{ وبالتالي فإن قيمة}$$

وتكون بؤرتي القطع هما

$$ب_1 (\sqrt{٢٢ - ٢١}, ٠)، ب_2 (-\sqrt{٢٢ - ٢١}, ٠)$$

مثال (٤ - ١)

إذا كانت معادلة القطع

$$١ = \frac{٢٠}{١٦} + \frac{٢}{٢٥}$$

فإن : (١) مركز القطع هو النقطة (٠، ٠)

(٢) لتعين بؤرتي القطع

$$\text{بما أن } ح^2 = ٢٢ - ٢٢$$

$$٩ = ١٦ - ٢٥ =$$

$$\text{إذن } ح = \pm ٣$$

وبالتالي فإن بؤرتي القطع هما (٣، ٠)، (-٣، ٠)

## ( ٤ - ٢ ) الاختلاف المركزي

ويمكن أيضاً تعريف القطع الناقص تعريفاً مختلفاً عن التعريف السابق وذلك باستخدام ما يعرف بالاختلاف المركزي ( هـ )

فإذا تحركت نقطة في مستوى معلوم فإن النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة في هذا المستوى ( البؤرة ) وبعدها عن مستقيم ثابت في المستوى ( الدليل ) نسبة ثابتة تسمى بالاختلاف المركزي .

والاختلاف المركزي هو الرابط المشترك والذي يوضح الفرق بين القطوع الثلاثة المكافئة والناقص والزائد

فإذا تحركت نقطة ما بحيث  $هـ = ١$

فإنها ترسم قطعاً مكافئاً

فإذا تحركت النقطة بحيث  $هـ > ١$

فإنها ترسم قطعاً ناقصاً

فإذا تحركت نقطة ما بحيث  $هـ < ١$

فإنها ترسم قطعاً زائداً

وعلى ذلك فإننا نكتب التعريف الآخر للقطع الناقص كما يلي

تعريف :

يعرف القطع الناقص بأنه مجموعة جميع النقاط في مستوى معلوم بحيث أن الاختلاف المركزي أقل من الواحد الصحيح

ومن الممكن أن نستنتج معادلة القطع الناقص أيضاً باستخدام هذا التعريف .

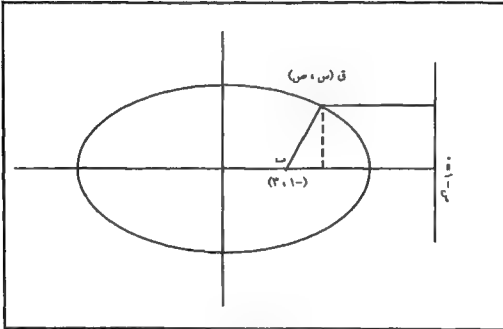
( يترك كتمرين )

مثال (٤-٢) :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته  $(-1, 3)$  ودليله  $s-1=0$

$$\text{واختلاف المركزي} = \frac{1}{3}$$

الحل :



شكل (٤-٤)

نفرض النقطة  $Q(s, s)$  على القطع المكافئ

$$\frac{1}{3} = \frac{|AQ|}{|QD|}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{|AQ|}{|QD|}$$

$$\frac{|s-1|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \sqrt{(s-3)^2 + (s+1)^2}$$

$$\frac{1 + \frac{2}{s}}{2} \times \frac{1}{9} = 9 + \frac{2}{s} + 1 + \frac{2}{s}$$

$$18 + \frac{2}{s} - 36 = 18 + 18 + \frac{2}{s} - 108 + 162 = 1 + \frac{2}{s}$$

$$17 + \frac{2}{s} - 34 = 18 + \frac{2}{s} - 108 + 189 = 0$$

هي معادلة القطع الناقص المطلوبة

### (٤ - ٣) الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الناقص

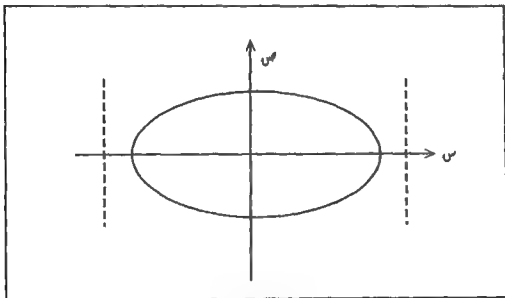
نتناول في هذا الجزء الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الناقص تبعاً لوضع المحور الأكبر والمحدود الأصغر بالنسبة لمحاور الإحداثيات

أولاً :

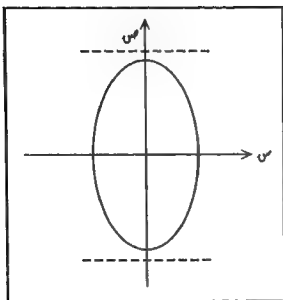
$$1 = \frac{\frac{2}{s}}{2} + \frac{\frac{2}{s}}{2}$$

حيث  $1 < 2$

فيه المحور الأكبر ينطبق على محور السينات والمحور الأصغر ينطبق على محور الصادات



شكل (٤ - ٥)



ثانياً :  $1 = \frac{ص^2}{ص_1^2} + \frac{س^2}{ص_2^2}$

وفيه المحور الأكبر ينطبق على  
محور الصادات والمحور الأصغر  
ينطبق على محور السينات

شكل (٤-٦)

(٤ - ٤) تعين الاختلاف المركزي إذا علمت معادلة القطع

في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص

بوضع  $ص = ٠$   $1 = \frac{ص^2}{ص_1^2} + \frac{س^2}{ص_2^2}$

فإن  $ص = \pm ب$  أي أن القطع الناقص يقطع محور الصادات  
في نقطتين ق<sub>١</sub> ، ق<sub>٢</sub> في جهتين مختلفتين من محور السينات ويبعدان عن

نقطة الأصل مسافة قدرها  $ب = \sqrt{١ - \frac{ص_1^2}{ص_2^2}}$

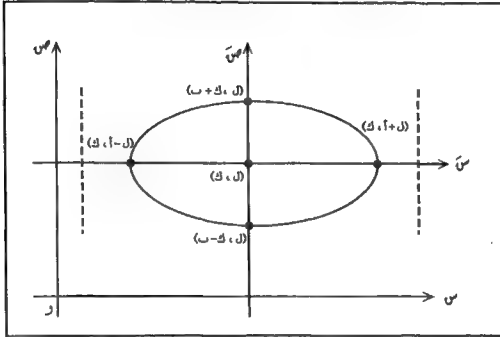
$$ب^2 = ١ - \frac{ص_1^2}{ص_2^2}$$

$$١ - \frac{ص_1^2}{ص_2^2} = ب^2$$

$$\frac{ص_1^2}{ص_2^2} - ١ = -ب^2$$

$$ب = \sqrt{\frac{ص_1^2}{ص_2^2} - ١}$$

( ٤ - ٥ ) معادلة القطع الناقص الناتجة من انتقال المحاور



شكل (٤-٧)

$$المعادلة \quad 1 = \frac{(س-ك)^2}{أ^2} + \frac{(ص-ل)^2}{ب^2}$$

تمثل قطعاً ناقصاً له الخواص التالية :

- (١) مركزه هو النقطة ( ل ، ك )
  - (٢) معادلة محوره الأكبر  $ص = ك$  ( يوازي محور السينات )
  - (٣) معادلة محوره الأصغر  $س = ل$  ( يوازي محور الصادات )
  - (٤) طرفا المحور الأكبر هما ( ل + أ ، ك ) ، ( ل - أ ، ك )
  - (٥) طرفا المحور الأصغر هما ( ل ، ك + ب ) ، ( ل ، ك - ب )
  - (٦) بؤرتاه هما ( ل + هـ ، ك ) ، ( ل - هـ ، ك )
- حيث هـ هي الاختلاف المركزي للقطع

(٧) معادلة الدليل

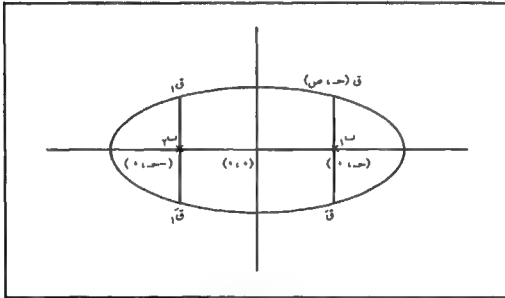
$$س = ل - \frac{1}{هـ}$$

$$س = ل + \frac{1}{هـ}$$

ونلاحظ أنه إذا كان محوري القطع موازيان لمحور الاحداثيات فإن الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص تكون

$$أ س^٢ + ب ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ح = ٠$$

(٤ - ٦) تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص :



شكل (٤ - ٨)

في الشكل الموضح (٤ - ٨) إذا رسمنا وتر بؤريا عموديا مثل ق ق

$$أو ق١ ق١ في القطع الناقص = \frac{ص٢}{ب} + \frac{س٢}{أ}$$

فإن الإحداثي السيني للنقطة ق هو ح أيضاً

أي أن إحداثيات ق هي (ح، ص)

وبما أن النقطة ق تقع على منحنى القطع اذن تحقق معادلته وبالتالي فإن

$$1 = \frac{ص^2}{٢٢} + \frac{ح^2}{٢١}$$

$$\frac{ح^2}{٢١} - 1 = \frac{ص^2}{٢٢}$$

$$\frac{ح^2 - ٢١}{٢١} =$$

$$\frac{ح^2}{٢١} =$$

$$\frac{ح^2}{٢١} = ص^2$$

$$\frac{ح^2}{١} = ص$$

$$\text{إذن طول الوتر البؤري العمودي} = ص = \frac{ح^2}{١}$$



مثال : ( ٤ - ٣ ) :

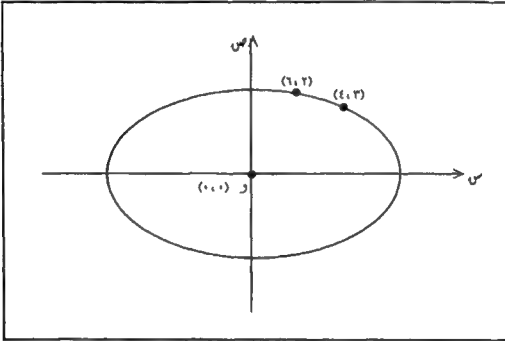
أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر على محور السينات بالنقطة ( ٤ ، ٣ ) ، ( ٦ ، ٢ ) - ثم أوجد كلا من :

( أ ) اختلافه المركزي

( ب ) بؤرتي القطع .

( ح ) معادلته دليبيه

الحل :



شكل ( ٤ - ٩ )

نفرض أن معادلة القطع في الصورة القياسية

$$( \text{قطع ناقص مركزه نقطة الأصل} ) \quad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

بما أن النقطة (٤ ، ٣) تقع على القطع إذن تحقق معادلته

$$(١) \quad ١ = \frac{٩}{٢٠} + \frac{١٦}{٢١}$$

، النقطة (٦ ، ٢) تقع على القطع إذن تحقق معادلته

$$(٢) \quad ١ = \frac{٤}{٢٠} + \frac{٣٦}{٢١}$$

بضرب (١) × ٤ ، (٢) × ٩

$$٤ - = \frac{٣٦}{٢٠} + \frac{٦٤}{٢١}$$

$$٩ = \frac{٣٦}{٢٠} + \frac{٣٢٤}{٢١}$$

بالطرح نحصل على

$$٥ = \frac{٢٦٠}{٢١}$$

$$٥٢ = ٢١ \times ٥ \quad \Leftarrow \quad ٢٦٠ = ٢١ \times ٥$$

بالتعويض في (١)

$$١ = \frac{٩}{٢٠} + \frac{١٦}{٥٢}$$

$$\frac{٣٦}{٥٢} = \frac{٩}{٢٠}$$

$$١٣ = \frac{٥٢}{٤} = ٢٠$$

إذن معادلة القطع هي

$$1 = \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{52}$$

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{52} \quad \text{أي}$$

(أ) لإيجاد الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - 1 = \frac{13}{52} - 1 =$$

$$\frac{3}{4} =$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} = e$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{(ب) لتعيين بؤرتيه}$$

$$39 = 13 - 52 =$$

$$(0, 39\sqrt{3}), (0, -39\sqrt{3}) \quad \text{البؤرتين هما}$$

(ج) لإيجاد معادلتي دليلا القطع

$$\frac{1}{x} \pm \frac{1}{y} =$$

$$\frac{52\sqrt{2}}{3} \pm \frac{1}{y} = \quad \text{بالتعويض}$$

$$\frac{13\sqrt{4}}{3} \pm \frac{1}{y} =$$

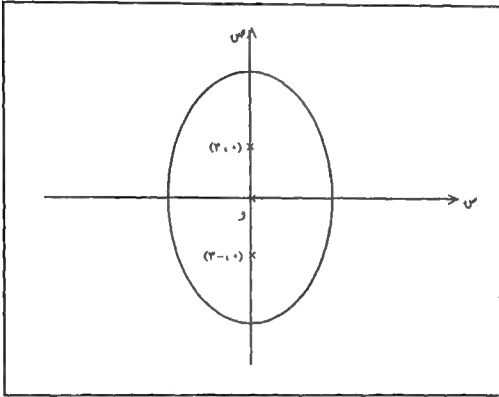
$$\{0 = \frac{52\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{y} : (x, y) = 1\} \quad \text{إذن الدليلين هما}$$

$$\{0 = \frac{52\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{y} : (x, y) = 1\} \quad ,$$

مثال ( ٤ - ٤ )

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه  $(3, 0)$  وطول نصف محورة الأكبر  $b = 5$  ثم أوجد معا دلتا دليليه

الحل :



شكل (٤-١٠)

بما أن المركز هو نقطة الأصل والبؤرة تقع على محور السينات إذن المحور الأكبر ينطبق على محور السينات ، والمحور الأصغر ينطبق على محور الصادات

نفرض أن معادلة القطع هي

$$1 = \frac{ص^2}{٢١} + \frac{س^2}{٢٥} \quad \text{أ} < \text{ب} \text{ كما عرفناها سابقا}$$

نصف طول المحور الأكبر  $a = 1$   $b^2 = 25$

وبما أن  $a^2 - b^2 = c^2$

$$9 = 25 - b^2$$

$$b^2 = 25 - 9 = 16 \quad \text{إذن}$$

وبالتالي فإن معادلة القطع في الصورة  $1 = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}$

$$\frac{25}{21} - 1 \sqrt{\quad} = - \quad \text{الاختلاف المركزي}$$

$$\frac{16}{25} - 1 \sqrt{\quad} =$$

$$\frac{9}{5} = \frac{9}{25} \sqrt{\quad} =$$

$$\frac{1}{-3} \pm = \text{ص} \quad \text{من معادلتنا الدليلين}$$

$$\frac{5}{3} \pm = \text{ص}$$

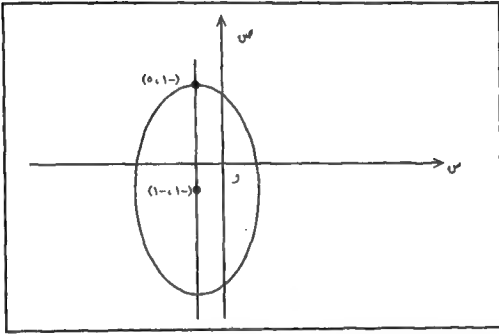
إذن الدليلين هما  $L_1 = \{(x, y) : \text{ص} - \frac{25}{3} = 0\}$

$L_2 = \{(x, y) : \text{ص} + \frac{25}{3} = 0\}$

مثال (٤ - ٥) :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه  $(-1, 1)$  وأحد رؤوسه هو النقطة  $(-1, 5)$  واختلافه المركزي  $\frac{1}{3}$

الحل :



شكل (٤ - ١١)

بما أن مركز القطع هو النقطة  $(-1, 1)$  ، وأحد رؤوسه  $(-1, 5)$  إذن محوره الأكبر يوازي محور الصادات ويبعد عنه بمسافة  $= 1 - 5$  ، ومعادلته هي  $ص - 1 = 1$  ويكون طول نصف المحور الأكبر  $1 - 5 = 4$  وحدات ولكن من العلاقة بين  $أ$  ،  $ب$  والاختلاف المركزي هـ

$$\frac{ب}{أ} - 1 = هـ \quad \text{نجد أن.}$$

$$\frac{ب}{36} - 1 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{9} - 1 = \frac{20}{36}$$

$$5 = \frac{20}{4}$$

$$20 = 20$$

$$1 = \frac{2(ص-ك)}{20} + \frac{2(ن-ج)}{36}$$

من معادلة القطع الناقص في الصورة

$$1 = \frac{2(1+ص)}{20} + \frac{2(1+ن)}{36}$$

إذن معادلة القطع المطلوبة . هي

$$0 = 5ص^2 + 9ص + 10 + 10ص + 18 - 166$$

مثال (٤-٦) :

ضع معادلة القطع الناقص

$$ص^2 + 4ص - 2 - 16ص + 8 = 0$$

في الصورة القياسية ومن ثم أوجد كلاً من :

( أ ) إحداثيات طرفي كلاً من المحورين الأكبر والأصغر .

(ب) الاختلاف المركزي

الحل :

باستخدام إكمال المربع (نظراً لحدوث انتقال للمحاور) يمكن تحويل

معادلة القطع الناقص من الصورة العامة إلى الصورة القياسية كما يلي

$$(ص^2 - 2ص + 1) - 1 + (4ص - 16ص + 16) - 16 = 0$$

$$٠ = ٩ - ٢(٢ - ص)٤ + ٢(١ - ص)$$

$$\text{بالقسمة على } ٩ \quad ٩ = ٢(٢ - ص)٤ + ٢(١ - ص)$$

$$١ = \frac{٢(٢ - ص)٤}{٩} + \frac{٢(١ - ص)}{٩}$$

$$١ = \frac{٢(٢ - ص)}{\frac{٩}{٤}} + \frac{٢(١ - ص)}{٩}$$

$$١ = \frac{٢ - ص}{\frac{٩}{٤}} + \frac{٢ - ص}{٩}$$

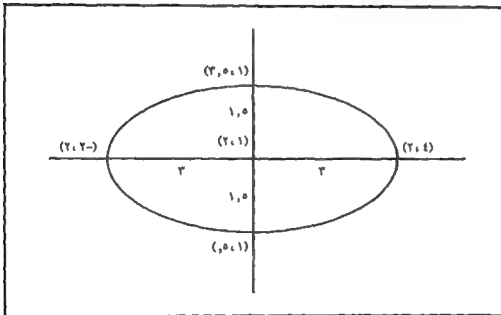
وينقل المحاور الى النقطة ( ٢ ، ١ )

وهذه معادلة قطع ناقص مركزه ( ٢ ، ١ ) ،

حيث  $٩ = ٢ا \Leftrightarrow ٣ = ا$  إذن طول المحور الاكبر = ٦

،  $٩ = ٢ب \Leftrightarrow \frac{٩}{٢} = ب$  إذن طول المحور الأصغر = ٣

وبالنظر الى الشكل الاتي يوضح كيفية تعيين طرفي المحورين



شكل (٤-١٢)



(أ) إحداثيات طرفي المحور الأكبر هما (٢، ٤) ، (٢، -٢) ،

وإحداثيات طرفي المحور الأصغر هما (٣، ٥، ١) ، (٣، ٥، ١) ،

(ب) الاختلاف المركزي بما أن  $e = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} - 1 = \frac{4}{9} - 1 =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = e \quad \text{إذن}$$

مثال (٤-٧) :

أوجد مركز ويؤرتي القطع

$$5x^2 + 9y^2 - 20x - 18y - 16 = 0$$

الحل :

باستخدام إكمال المربع نضع المعادلة في الصورة

$$1 = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$$

كما يلي :

$$0 = 5x^2 - 20x + 9y^2 - 18y - 16 - 9 + 9 = 5(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 2y) - 16$$

$$0 = 5(x^2 - 4x + 4 - 4) + 9(y^2 - 2y + 1 - 1) - 16$$

$$45 = 5(x-2)^2 + 9(y-1)^2$$

بالقسمة على ٤٥

$$1 = \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5}$$

وهذه معادلة قطع ناقص مركزه (٢، ١)

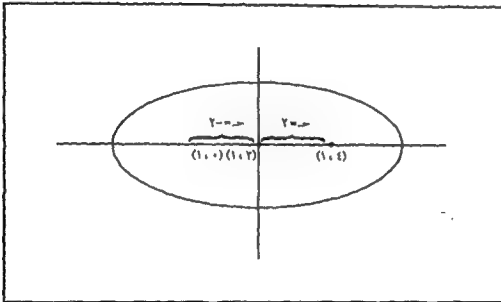
ولتعيين إحداثيات البورتين  $ح_2 - ح_1 = 2$

$$4 = 5 - 1 =$$

$$ح_2 \pm = ح_1$$

إذن البورتين هما  $(1, 4)$  ،  $(1, 0)$

والرسم يوضح كيفية تعيين البؤرة



شكل (٤-١٣)

ويمكن أيضاً تعيين البورتين عن طريق تحديد الاختلاف المركزي واستخدامه في ذلك كما يلي

$$ب_2 = 4 ، ب_1 = 5$$

$$ح_2 - ح_1 = 1 - \frac{21}{2}$$

$$= 1 - \frac{5}{4} = \frac{4}{4} - \frac{5}{4} =$$

$$\frac{2}{3} = \text{هـ}$$

إذن إحداثيات البؤرة هي (ل ± أ هـ، ك)

$$\text{أي } (2 \pm 3 \times \frac{2}{3}, 1)$$

$$\text{أي أن ب}_1 \equiv (1, 4), \text{ ب}_2 \equiv (1, 0)$$

مثال (٤ - ٨) :

ارسم القطع الناقص

$$16 \text{ س}^2 + 25 \text{ ص}^2 - 64 \text{ س} - 225 \text{ ص} - 111 = 0$$

الحل :

بإكمال المربع

$$16 \text{ س}^2 - 64 \text{ س} + 64 - 64 + 25 \text{ ص}^2 - 225 \text{ ص} + 225 - 225 - 111 = 0$$

$$+ (25 \text{ ص}^2 - 225 \text{ ص} + 225) - (16 \text{ س}^2 - 64 \text{ س} + 64) - 111 = 0$$

$$16 \text{ س}^2 - 64 \text{ س} + 64 - 16 \text{ ص}^2 + 225 \text{ ص} - 225 - 111 = 0$$

$$16 \text{ س}^2 - 64 \text{ س} + 64 - 16 \text{ ص}^2 + 225 \text{ ص} - 225 - 111 = 0$$

بالقسمة على ٤٠٠

$$1 = \frac{(2-3\text{س})^2}{16} + \frac{(2-3\text{ص})^2}{25}$$

وهذه معادلة قطع ناقص

(١) مركزه النقطة (٢، ٣)

(٢) أ = ٥ ⇔ طول المحور الأكبر = ١٠

ب = ٤ ⇔ طول المحور الأصغر = ٨

والمحور الأكبر يوازي محور السينات ومعادلته  $x = 3$

والمحور الأصغر يوازي محور الصادات ومعادلته  $y = 2$

(٣) طرفا المحور الأكبر هما  $(3, 1)$  ،  $(3, 5)$  ،  $(3, -1)$  ،  $(3, 7)$

(٤) طرفا المحور الأصغر هما  $(1, 2)$  ،  $(3, 2)$  ،  $(-1, 2)$  ،  $(5, 2)$

(٦) بؤرتا القطع لتعيين بؤرتا القطع نعين قيمة  $c$

$$c = 2 - 2 = 0$$

$$9 = 16 - 25 = c = 3 \pm$$

$$b = 3, c = 5 \Rightarrow b = 3, c = -1$$

(٧) باستخدام طول الوتر البؤري العمودي يمكن إيجاد إحداثيات أربع نقاط هما طرفي كل من الوترين البؤريين

$$طول الوتر البؤري العمودي = \frac{2b^2}{a} = \frac{16 \times 2}{5} = \frac{32}{5} = 6, 4$$

ويكون الأطراف الأربعة للوترين البؤريين هما النقط

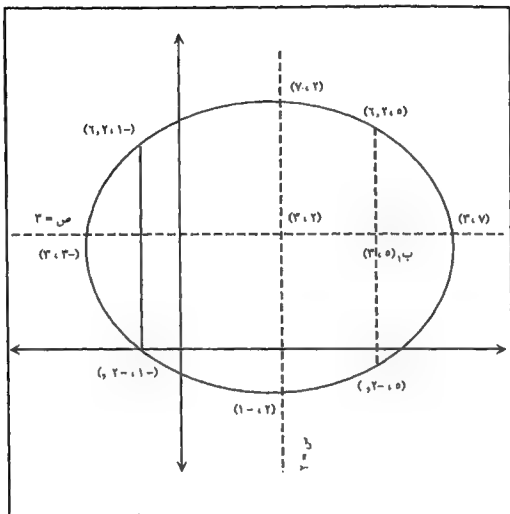
$$(3, 2, 5), (3, 2, -1), (1, 2, -1), (-1, 2, -1)$$

(٨) يمكن الحصول على نقط أخرى على القطع الناقص

بوضع  $x = 0$  وتعيين نقط تقاطع القطع مع محور السينات

وبوضع  $y = 0$  وتعيين نقط تقاطع القطع مع محور الصادات

من المعلومات السابقة يكون الشكل العام للقطع كما يلي :



شکل (۱۴-۴)

## تمارين (٤ - ١)

(١) أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر ينطبق على

محور السينات في كل من الحالات التالية :

أ - إذا مرَّ بالنقطتين (٣، ٣) ، (٢، ٤)

ب - إذا كان اختلافه المركزي  $\frac{3}{5}$  وطول محوره الأكبر يساوي ٥

ج - طول وتره البؤري العمودي  $\frac{16}{5}$  واختلافه المركزي  $\frac{1}{5}$

(٢) أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوريه ينطبقان على

محوري الإحداثيات في الحالات التالية :

أ - إذا كانت بؤرتيه (٤ ±، ٠) ورأسيه (٥ ±، ٠)

ب - إذا كانت بؤرتيه (٥ ±، ٠) واختلافه المركزي  $\frac{5}{8}$

ج - إذا كانت بؤرتيه (٠، ٦ ±) ونصف محوره الأصغر ٨

(٣) أوجد مركز وبؤرتي ودليلي ورأس القطع

$$٤ \text{ س} + ٦ \text{ ص} - ٨ = ٥$$

ثم أوجد أيضاً معادلة المحورين

(٤) أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٣، ١) وأحد رأسيه (٣، -٢)

$$\text{اختلافه المركزي } \frac{1}{3}$$

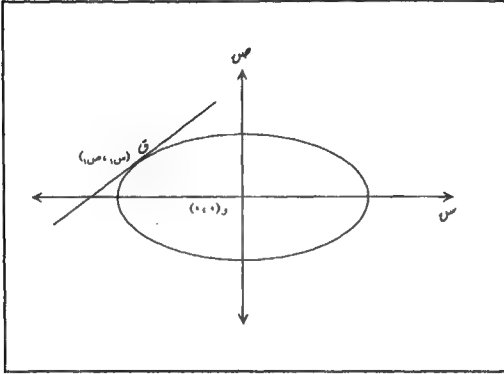
(٥) أوجد معادلة القطع الذي بؤرته (١، -١) والدليل المناظر لها هو س = ٠

والاختلاف المركزي  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  ثم أوجد مركزه وبؤرته الثانية والدليل المناظر لها .

$$(٦) \text{ ارسم القطع الناقص } \frac{(ص-٢)^2}{٤} + (١-س)^2 = ١$$

$$(٧) \text{ ارسم القطع الناقص } ٤ \text{ س} + ٢ \text{ ص} - ٢ = ٣$$

(٤-٧) : معادلتا المماس والعمودي للقطع الناقص عند نقطة عليه :



شكل (٤-١٥)

نفرض النقطة ق (س١ ، ص١) تقع على منحنى القطع الناقص الذي معادلته

$$1 = \frac{ص^2}{ص_2} + \frac{س^2}{س_1}$$

بإجراء التفاضل

$$0 = \frac{د ص}{د س} \cdot \frac{ص^2}{ص_2} + \frac{س^2}{س_1}$$

$$\frac{ص^2}{س_1} - \frac{د ص}{د س} = \frac{ص^2}{ص_2}$$

$$\frac{ص_2}{ص^2} \times \frac{ص^2}{س_1} - \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د س}$$

$$\text{بما أن } m \text{ ميل المماس عند النقطة } (ص_1, د_1) = \left| \frac{د_1}{د_1} \right| = \frac{د_1}{د_1} = 1$$

$$= - \frac{ص_1}{د_1} \times \frac{د_1}{ص_1} = -$$

إذن معادلة المماس عند النقطة  $(ص_1, د_1)$  هي

$$ص - ص_1 = - \frac{د_1}{ص_1} \times \frac{ص - ص_1}{د_1} = - \frac{ص - ص_1}{ص_1}$$

$$ص_1 (ص - ص_1) = - (ص - ص_1) د_1$$

$$ص_1 ص - ص_1^2 = - ص د_1 + ص_1 د_1$$

$$ص_1 ص + ص د_1 = ص_1^2 + ص_1 د_1$$

بالقسمة على  $ص_1 د_1$  وتصبح معادلة المماس

$$\frac{ص_1}{د_1} + \frac{د_1}{ص_1} = \frac{ص_1}{د_1} + \frac{ص}{د_1}$$

وبما أن  $(ص_1, د_1)$  تحقق معادلة القطع الناقص إذن الطرف الأيسر في المعادلة السابقة = 1

وبالتالي فإن معادلة المماس هي :

$$1 = \frac{ص}{د_1} + \frac{د_1}{ص_1}$$

$$\frac{ص}{د_1} \times \frac{د_1}{ص_1} = \frac{ص_1}{ص_1}$$



$$\text{معادلة العمودي هي } ص_1 - ص_1 = \frac{ص_1^2}{ص_2^2} (ص_1 - ص_1)$$

$$\Leftrightarrow ص_1 - ص_1 = \frac{ص_1^2}{ص_2^2} (ص_1 - ص_1)$$

$$\text{إذن معادلة العمودي هي } \frac{ص_1 - ص_1}{ص_1} = \frac{ص_1 - ص_1}{ص_2}$$

نتيجة :

$$\text{معادلة المماس للقطع الناقص } 1 = \frac{ص_1(ص_1 - ك)}{ص_2^2} + \frac{ص_1(ل - ص_1)}{ص_1^2}$$

عند النقطة  $(ص_1, ص_1)$  هي

$$1 = \frac{ص_1(ص_1 - ك)}{ص_2^2} + \frac{ص_1(ل - ص_1)}{ص_1^2}$$

ويمكن استنتاج هذه المعادلة باتباع نفس الخطوات المستخدمة في البند (٤ - ٧) .

(٤ - ٨) شرط تماس المستقيم  $ص = م س + ح$  للقطع الناقص

$$1 = \frac{ص_1}{ص_2^2} + \frac{ص_1}{ص_1^2}$$

من معادلة المستقيم  $ص = م س + ح$

وبالتعويض في معادلة المنحنى نحصل على

$$1 = \frac{ص_1(م س + ح)}{ص_2^2} + \frac{ص_1}{ص_1^2}$$

بالضرب  $\times (أ^2 ب^2)$

$$ب^2 أ^2 = ب^2 (أ + م) + أ^2 (أ + م)$$

$$ب^2 أ^2 = ب^2 أ + ب^2 م + أ^3 + أ^2 م$$

$$0 = ب^2 أ^2 - ب^2 أ + ب^2 م + أ^3 + أ^2 م$$

$$(1) \quad 0 = (ب^2 - أ^3) أ + ب^2 م + أ^2 م$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في م

ولكي يمس المستقيم القطع الناقص يكون مميز المعادلة (1) يساوي صفراً

أي أن

$$0 = 4 أ^2 م^2 - 4 (ب^2 - أ^3) أ \times (ب^2 م + أ^2 م)$$

بالقسمة على  $4 أ^2$  تصبح المعادلة

$$0 = ب^2 م + أ^2 م - (ب^2 - أ^3)$$

$$0 = ب^2 م + أ^2 م - ب^2 + أ^3$$

بالقسم على  $ب^2$

$$0 = م + \frac{أ^2 م}{ب^2} - 1 + \frac{أ^3}{ب^2}$$

$$\frac{أ^2 م}{ب^2} = 1 - م - \frac{أ^3}{ب^2}$$

$$م = \pm \sqrt{\frac{أ^2}{ب^2} - 1 - \frac{أ^3}{ب^2}}$$

ومنها فإن المستقيمان جن م س +  $\sqrt[2]{\text{م}^2 \text{ب}^2} + \sqrt[2]{\text{ب}^2}$

جن م س -  $\sqrt[2]{\text{م}^2 \text{ب}^2} + \sqrt[2]{\text{ب}^2}$  ،

$$1 = \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2}$$

لجميع قيم م الحقيقية

نتيجة :

المستقيمان (جن - ك) = م (س - ل) +  $\sqrt[2]{\text{م}^2 \text{ب}^2} + \sqrt[2]{\text{ب}^2}$

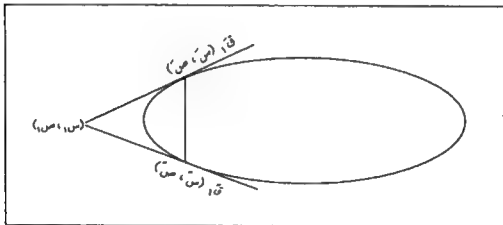
، (جن - ك) = م (س - ل) -  $\sqrt[2]{\text{م}^2 \text{ب}^2} + \sqrt[2]{\text{ب}^2}$

$$1 = \frac{\text{س}^2(\text{ك} - \text{ل})}{\text{ب}^2} + \frac{\text{م}^2(\text{ل} - \text{ك})}{\text{ب}^2}$$

لجميع قيم م الحقيقية

$$(4-9) \text{ معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع الناقص } 1 = \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2}$$

للمنطقة (س، ص<sub>1</sub>)



شكل (٤-١٦)

بفرض النقطة ق (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) رسم منها المماسين ق ق<sub>١</sub> ، ق ق<sub>٢</sub> للقطع الناقص

$$\text{حيث ق} \equiv (\text{س}^{\sim}, \text{ص}^{\sim}) , \text{ ق}^{\sim} \equiv (\text{س}^{\sim}, \text{ص}^{\sim})$$

والمطلوب تعيين معادلة وتر التماس للنقطة ق

$$(١) \quad \text{معادلة التماس عند ق}^{\sim} \text{ هي } ١ = \frac{\text{س}^{\sim} \text{س}_١}{\text{ص}_١} + \frac{\text{ص}^{\sim} \text{ص}_١}{\text{ب}_١}$$

$$(٢) \quad \text{معادلة التماس عند ق}^{\sim} \text{ هي } ١ = \frac{\text{س}^{\sim} \text{س}_٢}{\text{ص}_٢} + \frac{\text{ص}^{\sim} \text{ص}_٢}{\text{ب}_٢}$$

حيث كل من المماسين (١)، (٢) يمر بالنقطة ق<sub>١</sub> (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>)

إذن (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) تحقق معادلتها

$$(٣) \quad ١ = \frac{\text{س}_١ \text{س}_١}{\text{ص}_١} + \frac{\text{ص}_١ \text{ص}_١}{\text{ب}_١}$$

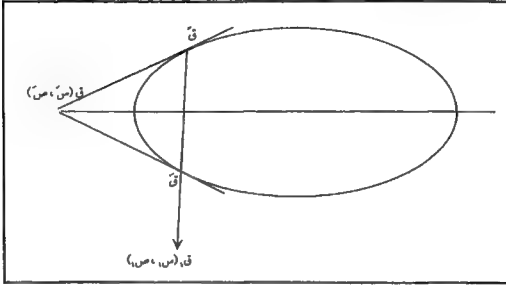
$$(٤) \quad ١ = \frac{\text{س}_٢ \text{س}_٢}{\text{ص}_٢} + \frac{\text{ص}_٢ \text{ص}_٢}{\text{ب}_٢}$$

وتر التماس هو المستقيم

$$(٥) \quad ١ = \frac{\text{س}^{\sim} \text{س}_١}{\text{ص}_١} + \frac{\text{ص}^{\sim} \text{ص}_١}{\text{ب}_١}$$

والمعادلة (٥) تتحقق بإحداثيات ق<sub>١</sub> ، ق<sub>٢</sub>

$$(٤-١٠) \text{ معادلة الخط القطبي بالنسبة للقطع الناقص } ١ = \frac{ص_٢}{ص_٢} + \frac{ص_٢}{ص_٢} \text{ للنقطة } (ص_١, ص_١)$$



شكل (٤-١٧)

كما سبق وأوضحنا في القطع المكافئ فإنه يمكن تعريف الخط القطبي للنقطة  $ق_١ (ص_١, ص_١)$  بالنسبة للقطع الناقص  $١ = \frac{ص_٢}{ص_٢} + \frac{ص_٢}{ص_٢}$  هو مجموعة جميع النقاط التي يمر وتر تماسها بنقطة ثابتة  $ق_١$

لإيجاد معادلة الخط القطبي للنقطة  $ق_١ (ص_١, ص_١)$  بالنسبة للقطع الناقص

$$١ = \frac{ص_٢}{ص_٢} + \frac{ص_٢}{ص_٢}$$

نرسم أي قاطع من  $ق_١ (ص_١, ص_١)$  للقطع ثم نرسم المماسين للقطع عند نقطتي التقاطع  $ق, ق$  ولنفرض أن المماسين تلاقيان في النقطة  $ق (ص, ص)$  فيكون الخط القطبي للنقطة  $ق_١ (ص_١, ص_١)$  والمراد إيجاد معادلته هو المحل الهندسي للنقطة  $ق (ص, ص)$

المستقيم القاطع للقطع يعتبر وتر تماس للنقطة ق (س، ص)

إذن معادلته هي

$$1 = \frac{ص ص}{٢ ص} + \frac{س س}{٢ س}$$

وحيث إن هذا القاطع يمر بالنقطة ق<sub>١</sub> (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) فهي تحقق معادلته

$$1 = \frac{ص١ ص}{٢ ص} + \frac{س١ س}{٢ س} \quad \text{إذن}$$

أي أن المحل الهندسي للنقطة ق (س، ص)

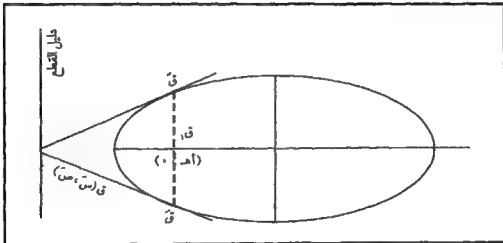
$$\text{هو } 1 = \frac{ص ص}{٢ ص} + \frac{س س}{٢ س}$$

وهذه هي معادلة الخط القطبي للنقطة ق<sub>١</sub> (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>)

بالنسبة للقطع الناقص

نتيجة هامة :

دليل القطع الناقص هو الخط القطبي لبؤرتيه



شكل (٤-١٨)

إذا كان الاختلاف المركزي للقطع = هـ

فإن البؤرة ق  $\equiv (أ هـ ، ٠)$

، ومعادلة الخط القطبي بالنسبة للقطع تصبح  $١ = \frac{س هـ}{١}$

أي س =  $\frac{١}{هـ}$  وهي معادلة الدليل

إذن دليل القطع الناقص هو الخط القطبي لبؤرته

مثال (٤ - ٩) :

أوجد معادلة المماس عند النقطة (-٣ ، ٢) للقطع الناقص

$$٢ س + ٣ ص - ٣٠ = ٠$$

الحل :

بإجراء التفاضل لمعادلة القطع الناقص

$$٤ س + ٦ ص = \frac{دص}{دس} = ٠$$

$$٦ ص = \frac{دص}{دس} - ٤ س$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٣} س$$

$$١ = \frac{٣}{٢} - س \quad \left| \frac{دص}{دس} = ٣ - س \right| \quad \text{إذن م} = \frac{٣}{٢} - س$$

معادلة المماس هي ص - ص<sub>١</sub> = م (س - س<sub>١</sub>)

$$ص - ٢ = ١ (س + ٣)$$

$$ص - س - ٥ = ٠$$

، معادلة العمودي  $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$$ص - ٢ = ١(س + ٣)$$

$$ص - ٢ = -س - ٣$$

$$ص + س + ١ = ٠$$

إذن معادلة كل من المماس والعمودي للقطع على الترتيب هما

$$ل = \{ (س، ص) : ص - س - ١ = ٠ \}$$

$$ل' = \{ (س، ص) : ص + س + ١ = ٠ \}$$

مثال (٤ - ١٠) :

أوجد معادلتى المماسين من النقطة (١، ٢) للقطع الناقص

$$\frac{ص^2}{٦} + \frac{س^2}{٣} = ١$$

الحل :

يمكن وضع معادلة القطع الناقص على الصورة

$$١ = \frac{ص^2}{٦} + \frac{س^2}{٣}$$

$$\text{أي أن } ٣ = ٢١، ٣ = ٢١$$

فتكون معادلة المماسين في الصورة

$$ص = م س + \sqrt{٢١ + ٢١ م^2}، ص = م س - \sqrt{٢١ + ٢١ م^2}$$

$$ص = م س + \sqrt{٦ + ٣ م^2}، ص = م س - \sqrt{٦ + ٣ م^2}$$

بما أن المماس يمر بالنقطة (١، ٢)



$$\sqrt{6 + 2m^3} \pm 2 = 1$$

$$\sqrt{6 + 2m^3} \pm = (2 - 1)$$

بتربيع الطرفين :

$$6 + 2m^3 = (2 - 1)^2$$

$$6 + 2m^3 = 2m^2 + m^2 - 1$$

$$0 = 5 - m^2 - m^2$$

$$0 = (1 + m)(5 - m)$$

$$1 = m \quad \text{أو} \quad 5 = m$$

فإذا كانت  $m = 5$

فإن معادلة المماس هي  $ص = 5 - 9$

وإذا كانت  $m = 1$

فإن معادلة المماس هي  $ص = -3 + 3$

أي أن المماسين من النقطة (٢ ، ١) للقطع الناقص  $ص^2 + 2 = 6$

$$\text{هما } ل_1 = (ص ، ص) : ص - 5 = 9 + 0$$

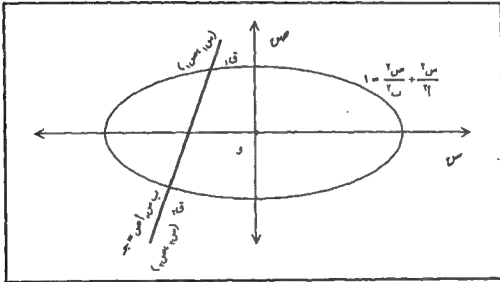
$$ل_2 = (ص ، ص) : ص + ص - 3 = 0$$

مثال (٤ - ١١)

أوجد طول الوتر الذي يقطعه منحنى القطع  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

من المستقيم  $x + y = c$

ثم أوجد متى يكون هذا المستقيم موازياً للقطع .



(شكل ٤-١٩)

نفرض أن المستقيم يقطع القطع الناقص في النقطتين

$Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$

والمطلوب إيجاد طول  $Q_1Q_2$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2}$$

$$= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2^2 + y_2^2)}$$

$$(1) \quad \sqrt{(س_1 + س_2)^2 + (ص_1 + ص_2)^2 - 4(س_1 ص_1 + س_2 ص_2)} =$$

من معادلة المستقيم

$$\frac{ص - ب س}{1} = ص$$

بالتعويض في معادلة القطع :

$$1 = \frac{ص(ص - ب س)}{1 \cdot 1} + \frac{س^2}{1}$$

بالضرب  $\times 1$

$$1 = ص(ص - ب س) + س^2$$

$$0 = ص^2 - ب س ص + س^2 - 1$$

$$0 = (ص^2 - ب س ص) + (س^2 - 1)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية جذراها  $س_1$  ،  $س_2$  يحققان

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ص}{1} = \frac{(-ب س \pm \sqrt{ب^2 س^2 - 4(س^2 - 1)})}{2} = س_1 + س_2 \\ \frac{ص^2 - ب س ص - (س^2 - 1)}{1} = س_1 س_2 \end{array} \right.$$

من معادلة المستقيم أيضاً

$$\frac{ص - ب س}{1} = ص$$

وبالتعويض في معادلة القطع نحصل على :

$$1 = \frac{ص^2}{ب^2} + \frac{ص(أ-ص)}{ب^2 أ}$$

$$1 = \frac{ص^2}{ب^2} + \frac{ص^2 - أ ص}{ب^2 أ}$$

بالضرب  $\times ب^2 أ$

$$أ - أ ص + ص^2 = ب^2 ص$$

$$ص^2 - أ ص + (أ - ب^2) = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في ص لها جذران هما  $ص_1$  ،  $ص_2$  يحققان

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{ص}{أ} = \frac{(أ-ص)-}{ب^2 أ} = ص_1 + ص_2 \\ \frac{ص^2 - أ ص}{ب^2 أ} = ص_1 ص_2 \end{cases}$$

بالتعويض من (2) ، (3) في (1) نحصل على

$$\sqrt{\frac{ص(أ-ص)}{ب^2} - \frac{ص}{أ} + \frac{ص(أ-ص)}{ب^2} - \frac{ص}{ب}} = ق_1 ق_2$$

$$\sqrt{ص^2 - أ ص + ص^2 - أ ص + ص^2 - أ ص - أ ص + أ ص} = \frac{1}{أ} =$$

$$\sqrt{ص^2 - أ ص + ص^2 - أ ص + ص^2 - أ ص - أ ص + أ ص} = \frac{1}{أ} =$$

$$\sqrt{ص^2 - أ ص + ص^2 - أ ص + ص^2 - أ ص - أ ص + أ ص} = \frac{1}{أ} =$$

$$\sqrt{ص^2 - أ ص + ص^2 - أ ص + ص^2 - أ ص - أ ص + أ ص} = \frac{1}{أ} =$$

وإذا كان المستقيم ممس المنحنى فإن  $Q_1 = 0$

$$0 = \sqrt{(1 + x^2)(2 - 2x^2 - h^2)} \quad \text{أي أن}$$

$$0 = (1 + x^2)(2 - 2x^2 - h^2)$$

$$0 = 2 - 2x^2 - h^2 \quad \text{لأن } 1 + x^2 \text{ لا يمكن أن } = 0$$

$$h^2 < 2 + x^2$$

$$h^2 = 2 - 2x^2$$

أي أن شرط التماس هو

$$h = \sqrt{2 - 2x^2}$$

## تمارين (٤-٢)

- (١) أوجد معادلة المماس والممود عليه للقطع الناقص  
 $3x^2 + 4y^2 - 6x - 8y + 4 = 0$  عند النقطة  $(-3, -2)$
- (٢) أوجد معادلة المماس للقطع الناقص  $3x^2 + 4y^2 = 100$   
والذي يوازي المستقيم  $3x + 8y = 7$
- (٣) أوجد ميل المماس للقطع الناقص  $4x^2 - 12x + 9y^2 - 2y = 0$   
 $3x - 6y = 0$  عند أي نقطة على المنحنى
- (٤) أوجد نقطة تماس المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمس القطع الناقص  
 $x^2 + y^2 + 3x - 2y = 0$
- (٥) أوجد معادلة المماس للقطع الناقص  $5x^2 + 7y^2 = 35$   
والذي يكون عموديا على المستقيم  $3x + 4y - 12 = 0$
- (٦) أوجد طول الوتر الذي يقطعه منحنى القطع الناقص  
 $5x^2 + 9y^2 - 20x - 18y + 25 = 0$  من محور السينات .

(٤ - ١١) طول تحت المماس ونحت العمود للقطع الناقص عند النقطة (س١ ، ص١)

أوضحنا فيما سبق وخلال دراستنا للقطع المكافئ أن :

طول تحت المماس لأي منحنى بالنسبة للنقطة (س١ ، ص١)

$$= -ص١ / \left| \frac{د ص}{د س} \right| (س١ ، ص١)$$

وطول نحت العمود للمنحنى بالنسبة للنقطة (س١ ، ص١) .

$$= \sqrt{ص١} \left| \frac{د ص}{د س} \right| (س١ ، ص١)$$

وهذا ما ينطبق أيضاً على القطع الناقص كمنحنى كما سبق وطبقنا ذلك بالنسبة للقطع المكافئ .

مثال (٤ - ١٢) :

أوجد طول تحت المماس ونحت العمود عند النقطة (٣- ، ٢-) للقطع الناقص

$$٣س + ٢ص + ٤ = ٠ \quad ٨ص - ٤٥ = ٠$$

الحل :

يأجراء التفاضل لمعادلة القطع نحصل على

$$٦س + ٨ص - \frac{د ص}{د س} ٨ + ٦ = ٠$$

$$٨(١ + ص) + \frac{د ص}{د س} ٦ - (١ - س) = ٠$$

$$\frac{٣ - (١ - س)}{(١ + ص) ٤} = \frac{٦ - (١ - س)}{(١ + ص) ٨} = \frac{د ص}{د س}$$

$$3- = \frac{\xi - x 3-}{1 - x \xi} = \frac{(1-3-)3-}{(1+2-) \xi} = (2-, 3-) \left| \frac{د ص}{د س} \right|$$

$$\text{طول تحت المماس} = - ص_1 \left| \frac{د ص}{د س} \right| (س_1, ص_1)$$

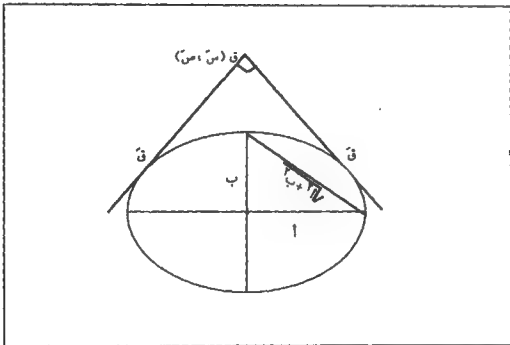
$$\frac{2-}{3-} = (3- / 2-) - = \text{وحدات}$$

$$\text{طول تحت العمودي} = ص_1 \left| \frac{د ص}{د س} \right| (س_1, ص_1)$$

$$6 = 3- \times 2- = \text{وحدات}$$

(١٢-٤) الخواص الهندسية للقطع الناقص :

أولاً : دائرة الاستدلال :



شكل (٤-٢٠)



إذا أخذت نقطة مثل ق (س، ص) خارج القطع ورسم منها مماسان للقطع بحيث كانت الزاوية المحصورة بين المماسين عند النقطة ق قائمة فإن النقطة ق في حركتها حول القطع ترسم دائرة تسمى دائرة الإستدلال التي يمكن أن نضع التعريف التالي لها :

تعريف :

هي مجموعة جميع النقاط التي يكون المماسين المرسومين منها للقطع الناقص متعامدين عندها .

$$\text{لتعين معادلة دائرة الاستدلال للقطع} \quad 1 = \frac{ص^2}{ب} + \frac{س^2}{ا} =$$

لنفرض أن النقطة ق (س، ص) بحيث ق ق، ق ق متعامدان عند النقطة ق فيكون المطلوب هو تعيين المحل الهندسي للنقطة ق

$$\text{بما أن المستقيم ل} = \{(س، ص) : ص = م س \pm \sqrt{ا^2 م^2 + ب}\}$$

يمس القطع دائماً بجميع قيم م الحقيقية

والمستقيم يمر بالنقطة (س، ص) فهي تحقق معادلته

$$ص = م س \pm \sqrt{ا^2 م^2 + ب}$$

$$ا^2 م^2 + ب = (ص - م س)^2$$

$$ا^2 م^2 + ب = ص^2 - ٢ م س ص + م^2 س^2$$

$$(١) \quad ٠ = (٣ - ٢ م س + م^2 س^2) - (ص^2 - ٢ م س ص + م^2 س^2)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في م ولها جذران هما م<sub>١</sub> ، م<sub>٢</sub>

(٢) بما أن المماسين متعامدين إذن  $m_1 \times m_2 = -1$

(٣) ولكن من (١)  $\frac{b^2 - 2}{2 - 2b} = \frac{1}{2}$

من (٢) ، (٣) نجد أن  $1 - \frac{b^2 - 2}{2 - 2b}$

$$b^2 - 2 = 2 - 2b$$

$$b^2 + 2b = 4$$

وتكون دائرة الاستدلال هي  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$

وهذه دائرة مركزها نقطة الأصل (مركز القطع)

$$\sqrt{b^2 + 2} = \text{نصف قطرها}$$

$$= \sqrt{\text{مربع نصف المحور الأكبر} + \text{مربع نصف المحور الأصغر}}$$

مثال (٤ - ١٣) :

أوجد معادلة دائرة الاستدلال للقطع الناقص

$$4x^2 + y^2 = 1$$

الحل :

نضع معادلة القطع على الصورة القياسية :

$$1 = \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{1}$$

$$\frac{1}{4} = x^2 \quad \text{فيكون}$$

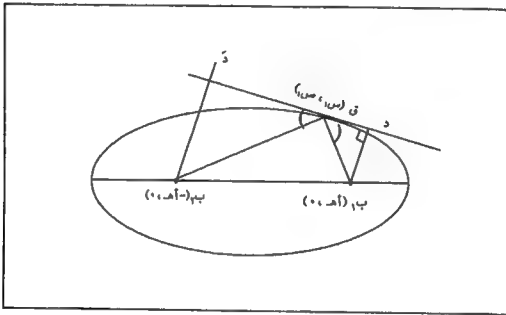
$$y^2 = \frac{1}{4}$$

إذن معادلة دائرة الاستدلال هي

$$س^2 + ص^2 = \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\xi} \right)$$

إذن دائرة الإستدلال هي د = (س ، ص) : س<sup>2</sup> + ص<sup>2</sup> =  $\frac{3}{\xi}$

ثانياً : المماس عند أي نقطة على القطع الناقص متساوي الميل على البعدين البؤريين للنقطة



شكل (٤ - ٢١)

د د' يمرّ القطع  $\frac{ص^2}{\gamma} + \frac{س^2}{\gamma_1} = 1$  عند النقطة ق (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>)

إذن معادلة المماس عند ق هي  $1 = \frac{ص_1 ص}{\gamma} + \frac{س_1 س}{\gamma_1}$

ولكن البؤرة ب<sub>١</sub> هي نقطة (أه ، ٠) حيث ه الاختلاف المركزي

إذن

$$(1) \quad \frac{\left| 1 - \frac{A_1}{1} \right|}{\sqrt{\frac{r_1}{\epsilon_1} + \frac{r_1}{\epsilon_1}}} = |b_1 d_1|$$

البؤرة الثانية ب  $\equiv (-A_1, 0)$

$$(2) \quad \frac{\left| 1 - \frac{A_2}{1} \right|}{\sqrt{\frac{r_2}{\epsilon_2} + \frac{r_2}{\epsilon_1}}} = |b_2 d_2|$$

من (1) ، (2)

$$\frac{1 - A_1}{1 - A_1} = \frac{1 - \frac{A_1}{1}}{1 - \frac{A_1}{1}} = \frac{b_1 d_1}{b_2 d_2}$$

$$\frac{q_1}{q_1} = \frac{1 - A_1}{1 + A_1} =$$

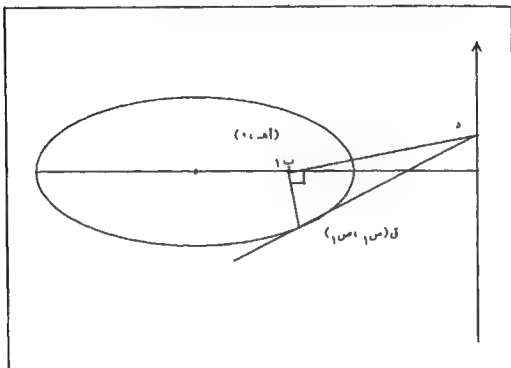
$$\frac{b_2 d_2}{q_1} = \frac{b_1 d_1}{q_1}$$

إذن  $b_1 \hat{q}_1 = b_2 \hat{q}_2$

يمكن الاستفادة من هذه الخاصية فيزيائياً :

فإذا كان هناك سطح مصقول ناشئ من دوران قطع ناقص حول محوره الأكبر ووضع مصدراً ضوئياً عند إحدى بؤرتي القطع فإن جميع الأشعة المنعكسة من السطح المصقول تمر بالبؤرة الثانية .

ثالثاً : جزء المماس لقطع ناقص المحصور بينه وبين نقطة التماس والنقطة التي يلاقي فيها المماس الدليل يقابل زاوية قائمة عند البؤرة



شكل (٤-٢٢)

إذا كانت معادلة القطع هي  $\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} = 1$  ، والنقطة  $Q \equiv (s_1, s_1)$  فإن معادلة المماس للقطع عند  $Q$  هي :

$$(1) \quad 1 = \frac{s_1 x}{r_1} + \frac{s_1 y}{r_2}$$

ومعادلة الدليل هي  $s = \frac{1}{x}$

فإذا كانت  $D$  هي نقطة تقاطع المماس مع الدليل فإننا نستطيع الحصول على إحداثيات النقطة  $D$  وذلك بحل معادلتين المماس والدليل معاً حيث يكون الإحداثي السيني للنقطة  $D$  هو  $s = \frac{1}{x}$

وبالتعويض في معادلة المماس

$$1 = \frac{\text{ص ص}_1}{\text{ب}_1} + \frac{\frac{1}{\text{أ}}}{\text{ب}_1}$$

$$\frac{\text{ص}_1}{\text{أ}} - 1 = \frac{\text{ص ص}_1}{\text{ب}_1}$$

$$\left[ \frac{\text{ص}_1}{\text{أ}} - 1 \right] \text{ب}_1 = \text{ص ص}_1$$

$$\left[ \frac{\text{ص}_1}{\text{أ}} - 1 \right] \frac{\text{ب}_1}{\text{ص}_1} = \text{ص}$$

إذن إحداثيات النقطة د هي  $\left( \left[ \frac{\text{ص}_1}{\text{أ}} - 1 \right] \frac{\text{ب}_1}{\text{ص}_1}, \frac{1}{\text{أ}} \right)$

إذن ميل ق ب  $(\text{م}_1) = \frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_1 - \text{أ}}$

$$\frac{\left[ \frac{\text{ص}_1}{\text{أ}} - 1 \right] \frac{\text{ب}_1}{\text{ص}_1}}{\text{أ} - \frac{1}{\text{أ}}} = \text{ميل د ب } (\text{م}_2)$$

$$\frac{(\text{أ} - \text{ص}_1) \frac{\text{ب}_1}{\text{ص}_1}}{(\text{أ} - 1) \frac{1}{\text{أ}}} =$$

$$\frac{-(\text{ص}_1 - \text{أ}_1) \times \text{ب}_1 \times \text{هـ}}{\text{ص}_1 \times \text{أ}_1 \times \text{هـ} - (\text{هـ} - 1)} \times \frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_1 - \text{أ}_1} = \text{أ}_1 \times \text{ب}_1$$

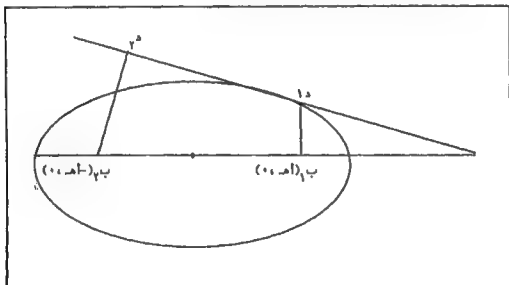
$$1 - = \frac{(\text{هـ} - 1) \text{أ}_1 -}{(\text{هـ} - 1) \text{أ}_1 -} \times \frac{\text{ب}_1 -}{(\text{هـ} - 1) \text{أ}_1 -} =$$

[ملاحظة ب<sub>1</sub> = أ<sub>1</sub> (هـ - 1) انظر تعريف الاختلاف المركزي]

إذن ق<sub>1</sub> ، د<sub>1</sub> ، متعامدان

أي أن ق<sub>1</sub> د<sub>1</sub> قائمة وهو المطلوب

رابعاً : حاصل ضرب طولَي العمودي الساقطين من البؤرتين على أي مماس لقطع ناقص يساوي مربع نصف المحور الأصغر



شكل (٤-٢٣)

إذا كانت معادلة القطع هي  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

فإن البؤرتين هما  $b^2 \equiv (a, 0)$  ،  $b^2 \equiv (0, -a)$

وتكون معادلة المماس هي  $x \cos \theta + y \sin \theta = p$

$$\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = p$$

طول العمود  $p$

$$\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = p$$

طول العمود  $p$

$$\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = p$$

حاصل ضرب العمودين

$$\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} \times$$

$$\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} =$$

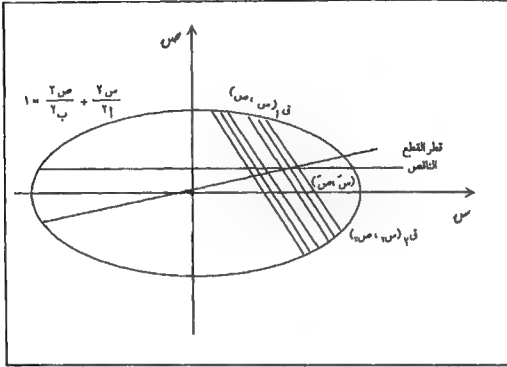
$$\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} =$$

$$\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} =$$

$$b^2 = \frac{(1 + \frac{x^2}{a^2})}{(1 + \frac{y^2}{b^2})} =$$



#### (٤-١٣) قطر القطع الناقص



شكل (٤-٢٤)

تعريف :

قطر القطع الناقص هو مجموعة جميع نقاط منتصفات مجموعة متوازية من أوتار القطع الناقص .

أي أنه هو المحل الهندسي لنقط منتصفات مجموعة متوازية من الأوتار في قطع ناقص ما .

معادلة القطر :

$$(١) \quad ١ = \frac{س٢}{ص٢} + \frac{س٣}{ص٣} \quad \text{إذا كانت معادلة القطع الناقص}$$

ونفرض أن أحد هذه الأوتار  $ق_1$   $ق_2$  معادلته هي  $ص = م س + ح$  (٢)

وإن  $ق$  منتصف هذا الوتر

فيكون المطلوب هو إيجاد المحل الهندسي للنقطة  $ق$

من معادلة المستقيم وبالتعويض في معادلة القطع الناقص نحصل على :

$$١ = \frac{س^2}{٢١} + \frac{(م س + ح)^2}{٢٢}$$

$$(٣) \quad ٠ = ١ - \frac{ح^2}{٢٢} + س \frac{ح م}{٢٢} + \left[ \frac{م^2}{٢٢} + \frac{١}{٢١} \right] س^2$$

والمعادلة الأخيرة من الدرجة الثانية لها جذران هما  $س_1$  ،  $س_2$  أي الإحداثيين السينيين للنقطة  $ق_1$  ،  $ق_2$  على الترتيب .

من المعادلة (٣) نجد أن

$$س_1 + س_2 = \frac{ح م}{٢٢} + \frac{١}{٢١} = \left[ \frac{م^2}{٢٢} + \frac{١}{٢١} \right] + \frac{ح م}{٢٢} = \frac{م^2 - ح م + ١}{٢١ + ٢٢ م}$$

فإذا كانت  $ق$  هي منتصف  $ق_1 ق_2$  فإن إحداثيها السيني هو

$$\frac{س_1 + س_2}{٢} = \frac{م^2 - ح م + ١}{٢(٢١ + ٢٢ م)} \quad \text{أي أنه إذا كانت } ق \text{ هي}$$

$$(٤) \quad س = \frac{م^2 - ح م + ١}{٢(٢١ + ٢٢ م)}$$

(٥) ولكن من (٢)  $ص = م س + ح$

بحذف  $ح$  من (٤) ، (٥) نجد أن :

$$ص = \frac{م^2 - ح م + ١}{٢(٢١ + ٢٢ م)} - ح$$

$$\left[ 1 - \frac{r_1^2}{r_1^2 + r_2^2} \right] \sin^2 \theta = \left[ \frac{r_1^2}{r_1^2 + r_2^2} \right] \sin^2 \theta$$

إذن  $r_1^2 \sin^2 \theta = r_2^2 \sin^2 \theta$

ويكون المحل الهندسي للنقطة (س، ص) معادلته هي :

$$\sin^2 \theta = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

وواضح أن المعادلة السابقة هي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل ونستنتج من ذلك أن جميع أقطار القطع الناقص تمر بنقطة الأصل (مركز القطع) .

تعريف :

يقال إن قطران مترافقان إذا نصف أحدهما مجموعة من الأوتار الموازية للآخر

مثال (٤ - ١٤) :

أوجد معادلة قطر القطع الناقص  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  الذي ينصف جميع الأوتار التي ميلها  $\frac{1}{3}$

الحل :

$$\text{باستخدام معادلة القطر } \sin^2 \theta = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

تكون المعادلة المطلوبة هي :

$$\sin^2 \theta = \frac{4}{9 \times \frac{1}{9}}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{4}{9}$$

أي أن القطر ل = { (س، ص) :  $4 = 9 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta = 0$  }

## تمارين (٤-٣)

(١) أوجد معادلة الأوتار البؤرية المارة بالنقطة (٢ ، ١) والواقعة على القطع الناقص

$$٣س + ٢ص - ٦س - ٤س + ٢ = ٠$$

(٢) أوجد معادلتى المماسين للقطع الناقص  $٩س + ٢ص + ١٦س = ١$

الذي يصنع كل منهما زاوية تساوي  $٤٥^\circ$  مع المحور الأكبر

(٣) أوجد قيمة  $ك$  التي تجعل المستقيم  $٢س + ٣س + ك = ٠$

$$مماساً للقطع  $١ = ٢س + ٤ص$$$

(٤) أوجد معادلتى المماسين للقطع  $٢س + ٢ص + ٦س = ٢$  المرسومين من النقطة (٢ ، ١)

وأوجد إحداثيات نقط التماس .

(٥) نقطة تتحرك بحيث يكون حاصل ضرب ميلتي مستقيمين واصلين منهما الى

النقطتين (٢ ، ٣) ، (١ ، ٢) يساوي  $-٣$  أثبت أن المحل الهندسي قطع ناقص

وأوجد مركزه .

(٦) أثبت أن المحل الهندسي للنقط التي تقسم الأبعاد البؤرية لنقط القطع الناقص

$٩س + ٢ص + ٢٥س = ٢٢٥$  بنسبة  $١:٣$  من جهة البؤرة هو قطع ناقص متحد مع

القطع الأصلي في تلك البؤرة .

(٧) أوجد طول أحد المماسات المشتركة للقطعين :

$$٤س + ٢ص - ٢٦س ، ١٦س + ٢ص + ٢ = ٠$$

$$(٨) \text{ ق نقطة واقعة على القطع الناقص } \frac{ص^2}{٢١} + \frac{ص^2}{٢٢} = ١$$

فإذا قابل المماس للقطع عند ق المماسين عند الرأسين ف<sub>١</sub> ، ف<sub>٢</sub> في النقطتين ك<sub>١</sub> ، ك<sub>٢</sub> فإثبت أن

$$ف_١ ك_١ \times ف_٢ ك_٢ = ٢٢$$

(٩) إثبت أن المحل الهندسي لمنتصفات الأجزاء من المماسات للقطع الن

$$٤ = \frac{ص^2}{٢١} + \frac{ص^2}{٢٢} = ١ \text{ المحصورة بين المحورين هو المنحنى } \frac{ص^2}{٢١} + \frac{ص^2}{٢٢} = ٤$$

(١٠) إذا كونت بؤرتي القطع الناقص وإحدى نهايتي محوره الأصغر رؤوس مثلث متساوي الأضلاع فأوجد الاختلاف المركزي للقطع .

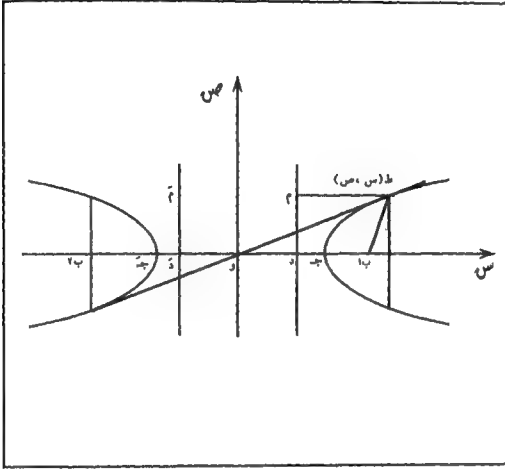
(١١) أوجد معادلة قطر القطع الناقص ٩ س + ٢ ص + ٢٥ = ٢٢٥ ، والذي ينصف الأوتار التي لها ميل مشترك = ٣

(١٢) أوجد معادلة القطر في القطع الناقص س + ٢ ص + ٤ = ٢٠ والمرافق للقطر ص = ٣

(١٣) أوجد معادلة قطر القطع الناقص ٤ س + ٥ ص + ٢٠ = ٢٠ التي تنصف الأوتار التي : (أ) ميلها = -  $\frac{٢}{٣}$

(ب) توازي المستقيم ٣ س - ٥ ص = ٦ .

## ثانياً : القطع الزائد



شكل (٤-٢٥)

### تعريف :

يعرف القطع الزائد بأنه الحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوى معلوم بحيث تكون النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة  $ب_1$  وبعدها عن مستقيم  $م$  د تكون دائماً نسبة ثابتة  $هـ$  بحيث  $هـ < ١$

وتسمى النقطة الثابتة  $ب_1$  بالبؤرة والمستقيم الثابت  $م$  بالدليل والنسبة  $هـ$  تعرف بالاختلاف المركزي للقطع الزائد .

(٤-١٤) معادلة القطع الزائد :

إذا اعتبرنا مركز القطع هو نقطة الأصل و ، ب ، ب هما البؤرتان

، م د ، م د هما دليلا القطع (انظر شكل ٤-٢٥)

وكان  $ح_٢ = أ ، ح_١ < أ$

$$بمأن \quad \frac{ب_١}{ح_١} = ح$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ب_١ ح_٢ = ح د (١) \\ ب_١ ح_١ = ح د (٢) \end{array} \right. \text{ من تعريف القطع}$$

من (١) ، (٢) بالطرح

$$ب_١ ح_٢ - ب_١ ح_١ = ح د - ح د$$

$$ح_٢ - ح_١ = ح د \times و$$

$$\text{ومنها} \quad أ = ح د \times و$$

$$\frac{أ}{ح} = و$$

لكن من (١) ، (٢) بالجمع فإن

$$و = أ$$

نفرض نقطة على القطع الزائد ط (س ، ص)

$$ب_١ ط = ب_٢ ط م$$

وبما أن إحداثيات ب (البؤرة) هي (أ ، ٠)

$$\text{والدليل هو المستقيم س} = \frac{أ}{ح}$$

$$\begin{aligned} \text{إذن} \quad (ص - أ هـ)^2 &= ص^2 + هـ^2 - ٢(ص هـ) \\ ص^2 - ٢أ هـ ص + أ^2 هـ^2 &= ص^2 + هـ^2 - ٢ص هـ \\ ص^2 (١ - هـ^2) &= ص^2 (١ - هـ^2) \end{aligned}$$

بالقسمة على  $(١ - هـ^2)$

$$١ = \frac{ص^2}{ص^2 (١ - هـ^2)} - \frac{ص^2}{ص^2}$$

$$\text{بوضع} \quad ص^2 = أ^2 (١ - هـ^2) \quad \text{نجد أن}$$

$$١ = \frac{ص^2}{ص^2} - \frac{ص^2}{ص^2}$$

وهي معادلة القطع الزائد المطلوبة

لاحظ الفرق الواضح والهام بين معادلتَي القطعين الناقص والزائد :

$$\text{ففي القطع الناقص وضعنا } ب^2 = أ^2 (١ - هـ^2) \quad \text{حيث } هـ < ١$$

$$\text{بينما في القطع الزائد وضعنا } ب^2 = أ^2 (هـ^2 - ١) \quad \text{حيث } هـ > ١$$

مع العلم بأن حـ يسمى بالمحور المستعرض للقطع حيث طول حـ = أ  
والمحور العمودي عليه من نقطة المركز يسمى بالمحور المرافق

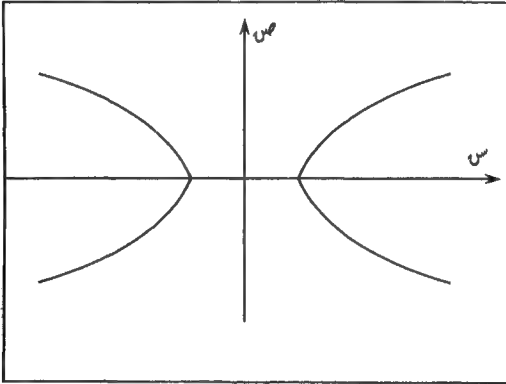
[في شكل (٤ - ٢٥) المحور المرافق يقع على محور الصادات]



(٤- ١٥) الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الزائد :

نتناول في هذا الجزء الصور القياسية المختلفة لمعادلة القطع الزائد تبعاً لوضع المحور القاطع والمحور المرافق بالنسب لمحاور الإحداثيات .

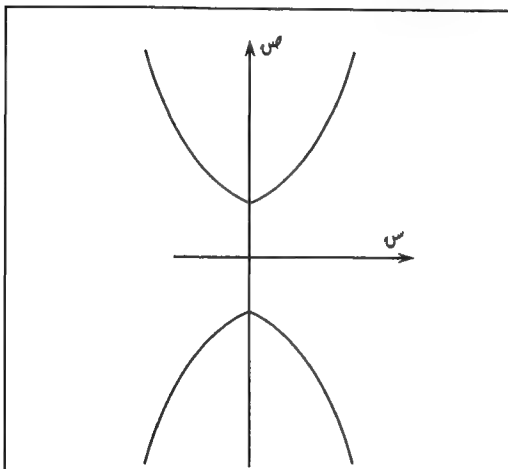
أولاً : إذا كان المحور القاطع يقع على محور السينات ، والمحور المرافق على محور الصادات .



شكل (٤- ٢٦)

$$\text{تكون معادلة القطع} \quad 1 = \frac{ص^2}{ص_1^2} - \frac{س^2}{س_1^2}$$

ثانياً : إذا كان المحور القاطع يقع على محور الصادات ، المحور المرافق يقع على محور السينات .



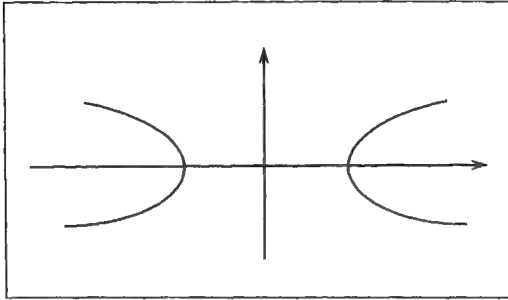
شكل (٤-٢٧)

$$١ = \frac{ص^٢}{٢١} - \frac{س^٢}{٢٢}$$

تكون معادلة القطع

وفي الحالتين يكون  $٢ = ٢(٢ - ١)$  .

(٤ - ١٦) معادلة القطع الزائد الناتجة من انتقال المحاور .



شكل (٤ - ٢٨)

$$\text{المعادلة} \quad 1 = \frac{(x - k)^2}{a^2} - \frac{(y - l)^2}{b^2}$$

هي معادلة قطع زائد لأنه لو نقلنا نقطة الأصل إلى النقطة الإختيارية (ل ، ك)

$$\text{تصبح المعادلة} \quad 1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

وهي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل الجديدة الإختيارية ومن ذلك فإننا

نستنتج أن

$$1 = \frac{(x - k)^2}{a^2} - \frac{(y - l)^2}{b^2}$$

هي معادلة قطع زائد له الخواص التالية :

(١) المركز (ل ، ك)

- (٢) معادلة المحور القاطع  $ص = ك$  .  
 (٣) معادلة المحور المرافق  $س = ل$  .  
 (٤) طرفا المحور القاطع هما  $(ل - أ ، ك)$  ،  $(ل + أ ، ك)$   
 (٥) طرفا المحور المرافق هما  $(ل ، ك - ب)$  ،  $(ل ، ك + ب)$  .  
 (٦) بؤرتاه هما  $(ل + هـ ، ك)$  ،  $(ل - هـ ، ك)$   
 (٧) معادلتا الدليلين هما :  $س = ل - \frac{ل}{هـ}$  ،  $س = ل + \frac{ل}{هـ}$

(٤ - ١٧) تعيين طول الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد :

من معادلة القطع  $س = \frac{ل^2}{ل - هـ} - \frac{ل^2}{ل + هـ}$  (أنظر شكل ٤ - ٢٥)

بوضع  $س = أ هـ$  نحصل على

$$١ = \frac{ل^2}{ل - هـ} - \frac{ل^2}{ل + هـ}$$

$$١ - هـ^2 = \frac{ل^2}{ل - هـ}$$

$$ص^2 = ب^2 (١ - هـ^2)$$

$$= \frac{ل^2}{ل + هـ} \times ب^2$$

$$= \frac{ل^2}{ل + هـ}$$

$$ص = \frac{ل^2}{ل + هـ}$$

$$إذن طول الوتر البؤري العمودي = \frac{ل^2}{ل + هـ}$$

(٤- ١٨) معادلتا المماس والعمودي للقطع الزائد عند نقطة عليه .

معادلة المماس عند النقط (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) للقطع الزائد

$$١ = \frac{ص_١^2}{٢_١} - \frac{س_١^2}{٢_١}$$

تكون على الصورة

$$١ = \frac{ص_١ ص_١}{٢_١} - \frac{س_١ س_١}{٢_١}$$

البرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف الإشارة

(أنظر البرهان السابق في ٤ - ٧)

أيضاً معادلة العمودي على المماس عند النقطة (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) للقطع الزائد

$$١ = \frac{ص_١^2}{٢_١} - \frac{س_١^2}{٢_١}$$

تكون على الصورة :

$$\frac{ص_١}{١} - \frac{س_١}{٢_١} = \frac{ص_١ - ص_١}{١ - س_١}$$

البرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف الإشارة

(أنظر البرهان السابق في ٤ - ٧)

(٤-١٩) شرط تماس المستقيم ص = م س + ح

$$1 = \frac{ص^2}{ص_1} - \frac{ص^2}{ص_2} \quad \text{للقطع الزائد}$$

الشرط اللازم لكي يمس المستقيم ص = م س + ح

$$1 = \frac{ص^2}{ص_1} - \frac{ص^2}{ص_2} \quad \text{للقطع الزائد}$$

$$ح = \pm \sqrt{ص_1^2 - ص_2^2}$$

$$أي أن المستقيم ص = م س + ح$$

$$\text{يمس القطع الزائد} \quad 1 = \frac{ص^2}{ص_1} - \frac{ص^2}{ص_2} \quad (\text{لجميع قيم م الحقيقية})$$

البرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف الإشارة .

(انظر البرهان السابق في ٤-٨)

(٢٠ - ٤) معادلة وتر التماس بالنسبة للقطع الزائد  $1 = \frac{ص_2}{ص_1} - \frac{ص_2}{ص_1}$  للنقطة (ص<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) .

معادلة وتر التماس للقطع الزائد .

$$1 = \frac{ص_2}{ص_1} - \frac{ص_2}{ص_1}$$

بالنسبة للنقطة (ص<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) هي  $1 = \frac{ص_2}{ص_1} - \frac{ص_2}{ص_1}$

البرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف الإشارة .

(انظر البرهان السابق في ٤ - ٩)

(٢١ - ٤) معادلة زوج المستقيمان المماسين المرسومين من النقطة (ص<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) للقطع الزائد هي :

$$= \left[ 1 - \frac{ص_2}{ص_1} - \frac{ص_2}{ص_1} \right]$$

$$\left[ 1 - \frac{ص_2}{ص_1} - \frac{ص_2}{ص_1} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{ص_2}{ص_1} - \frac{ص_2}{ص_1} \right]$$

البرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف الإشارة

(انظر البرهان في ٤ - ١٠) .

(٢٢ - ٤) الخواص الهندسية للقطع الزائد

أولاً : دائرة الاستدلال للقطع الزائد .

معادلة دائرة الإستدلال في القطع الزائد الذي معادلته

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{هي}$$

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2$$

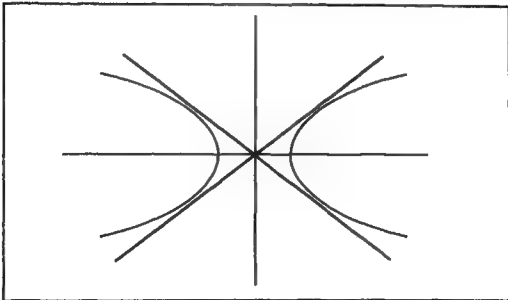
التعريف والبرهان :

تماماً كما ورد سابقاً من خلال عرضنا للقطع الناقص مع ملاحظة اختلاف

الإشارة

(انظر البرهان السابق في ٤ - ١٢) .

ثانياً : الخطان التقاربان للقطع الزائد :



شكل (٤ - ٢٩)



تعريف :

يعرف الخط التقاربي لأي منحنى هو المستقيم الذي يمس المنحنى في ما لا نهاية .

معادلة الخط التقاربي للقطع الزائد :

$$(1) \quad \text{معادلة القطع الزائد هي} \quad 1 = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$$

$$(2) \quad \text{نفرض مستقيماً معادلته} \quad y = mx + c$$

ويحل (1)، (2) معاً

$$\text{إذن} \quad 1 = \frac{(mx+c)^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$$

$$(3) \quad 0 = \left[ 1 + \frac{c^2}{a^2} \right] - \frac{2mcx}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} \quad \text{ومنها فإن} \quad \left[ \frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right] x^2 - \frac{2mc}{a^2} x - 1 = 0$$

إذن الخط التقاربي يقطع القطع في  $\infty$  إذن جذرا المعادلة (3) لانهائيان

ومن شرط أن يكون الجذران لانهائيان في المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$

$$\text{فإن} \quad a = 0, \quad c = 0$$

$$(4) \quad \text{من المعادلة (3)} \quad 0 = \left[ \frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right] x^2 - \frac{2mc}{a^2} x - 1 = 0$$

$$(5) \quad 0 = \frac{2mc}{a^2} x - 1 = 0, \quad \text{و}$$

$$\text{من المعادلة (5)} \quad \text{إذن} \quad c = 0 \quad (m \neq 0, \quad b \neq 0)$$

$$\text{من المعادلة (4)} \quad \text{إذن} \quad \frac{c}{a} = \pm \frac{b}{m}$$

$$(2) \quad \text{أي} \quad m = \pm \frac{b}{a} \quad \text{وبالتعويض في}$$

تكون معادلة الخطين التقاربين للقطع الزائد هي :

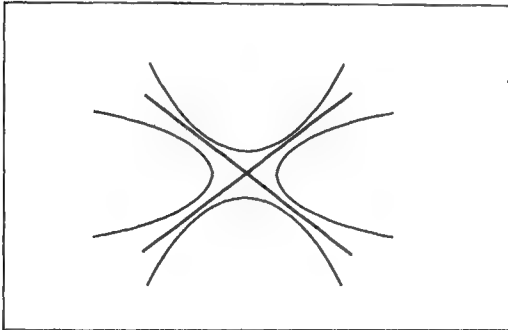
$$ص = \frac{ب}{١} = ص ، \quad ص = \frac{ب}{١} = ص$$

(حيث ح = ٠)

إذن يوجد للقطع الزائد  $١ = \frac{ص^٢}{٢١} - \frac{ص^٢}{٢٢}$  خطان تقاربين

معادلتها المشتركة  $ص = \frac{٢٢}{٢١} = ٢$  وهذه معادلة مستقيمين يمران بنقط الأصل (مركز القطع).

ثالثاً : القطع الزائد المرافق



شكل (٤ - ٣٠)

(١) من البند السابق فإن القطع  $١ = \frac{ص^٢}{٢٢} - \frac{ص^٢}{٢١}$

له معادلة مشتركة للخطين التقاربين هي

$$٠ = \frac{ص^٢}{٢٢} - \frac{ص^٢}{٢١}$$

ولكن هذه المعادلة تعتبر أيضاً معادلة مشتركة للخطين التقاربيين

$$(٢) \quad \text{للقطع الزائد} \quad ١ = \frac{ص٢}{٢ب} - \frac{ص١}{٢ا}$$

يعرف القطع الزائد الذي معادلته رقم (٢)

بأنه قطع زائد مرافق للقطع الزائد الذي معادلته رقم (١)

رابعاً : القطع الزائد القائم

القطع الزائد القائم هو القطع الزائد الذي يتساوى فيه طول المحورين

أي أن  $٢٢ = ٢٢$  ومنها

$$ب = ا$$

وفي القطع الزائد القائم يكون :

(١) معادلة القطع :

$$\text{من معادلة القطع الزائد} \quad ١ = \frac{ص٢}{٢ب} - \frac{ص١}{٢ا}$$

$$ب = ا \quad \text{بوضع}$$

تصبح معادلة القطع الزائد القائم هي

$$ص٢ - ص١ = ٢ا$$

(٢) الاختلاف المركزي :

$$\text{في القطع الزائد} \quad ١ = \frac{ص٢}{٢ب} - \frac{ص١}{٢ا}$$

يكون  $٣ (هـ - ١) = ٢ب$  هـ (الاختلاف المركزي)

بما أن القطع زائد قائم إذن  $\alpha = (1 - \epsilon) \alpha$

$$\epsilon = \sqrt{1 - \alpha}$$

(٣) الخططين التقاربين :

معادلة الخططين التقاربين في القطع الزائد هي

$$\frac{\alpha}{\epsilon} = \epsilon$$

وإذا كان القطع الزائد قائماً فإن  $\epsilon = \alpha$

وتكون معادلة الخططين التقاربين هي  $\epsilon = \frac{\alpha}{\epsilon}$

$$\text{أي أن } \epsilon = \pm \epsilon$$

وهذه بالطبع معادلة مستقيمين متعامدين . . . ومن ذلك فإن الخططين التقاربين للقطع الزائد القائم مستقيمان متعامدان .

من (١) ، (٢) ، (٣) تتضح لنا الخواص المختلفة للقطع الزائد القائم .

ملاحظة :

معادلة القطع الزائد القائم بالنسبة لخطي التقارب كمحوري إحداثيات .

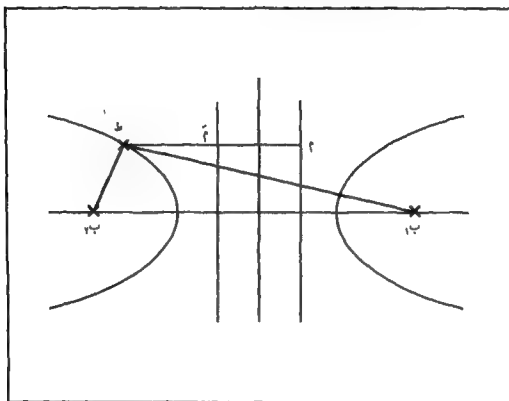
لإيجاد المعادلة نتصور دوران محوري الإحداثيات زاوية قدرها  $45^\circ$

$$\text{أي نضع } \epsilon = \epsilon \text{ حتا } 45^\circ - \epsilon \text{ حا } 45^\circ$$

،  $\epsilon = \epsilon \text{ حا } 45^\circ + \epsilon \text{ حتا } 45^\circ$  في معادلة القطع الزائد القائم فنحصل على المعادلة العامة للقطع الزائد القائم بالنسبة للخططين التقاربين للقطع الزائد القائم كمحوري إحداثيات .

$$\text{في الصورة } \epsilon = \epsilon$$

خامساً : الفرق بين البعدين البؤريين لأي نقطة تقع على القطع الزائد  
تساوي مقداراً ثابتاً



(٣١-٤)

البرهان :

من تعريف القطع الزائد وشكل (٣١-٤)

$$r_1 - r_2 = 2a$$

$$r_1 - r_2 = 2a$$

$$r_1 - r_2 = 2a$$

$$r_1 - r_2 = 2a$$

ولكن بعد الدليل عن المحور الصادي  $\frac{1}{-h} =$

$$\frac{12}{-h} = 12 \text{ م } \quad \text{إذن}$$

$$\frac{12}{-h} \times h = 12 \text{ م} - \text{ب} - \text{ط} \quad \text{إذن}$$

$$12 =$$

= مقدار ثابت

وهو المطلوب

يمكن استخدام هذه الخاصة في تعريف القطع الزائد

تعريف :

القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدار ثابت .

مثال (٤-١٥) :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي ينطبق محوريه على محوري الإحداثيات إذا علم أن طول وتره البؤري العمودي يساوي ٨ والمسافة بين البؤرتين تساوي  $2\sqrt{5}$

الحل :

$$8 = \frac{2b^2}{a} = \text{طول الوتر البؤري}$$

$$(1) \quad 16 = 2b^2 \quad \text{إذن}$$

$$2\sqrt{5} = 2a$$

$$2\sqrt{5} = 2c + 2\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$(2) \quad 5 = c + \sqrt{a^2 - b^2}$$

بالتعويض من (١) في (٢)

$$٠ = ٥ - ٤ + ٢١$$

$$٠ = (١ - ١) (٥ + ١)$$

$$١ = ٥ - ١ \text{ أو } ١ = ٥$$

$$٤ = ٢ \text{ ب،}$$

فإذا كان محور القطع ينطبق على محور السينات فإن معادلته :

$$١ = \frac{٢ \text{ ص}}{٤} - \frac{٢ \text{ س}}{١} \text{ هي}$$

وإذا كان محور القطع ينطبق على محور الصادات فإن معادلته

$$١ = \frac{٢ \text{ س}}{٤} - \frac{٢ \text{ ص}}{١} \text{ هي}$$

مثال (٤ - ١٦)

أوجد مركز ورأسي ويؤرتي القطع الزائد

$$١ = \frac{٢(٣ + \text{ص})}{١٦} - \frac{٢(٢ - \text{س})}{٢٥}$$

ثم أوجد معادلة الدليلين والخطين التقاربيين

الحل :

بنقل المحاور إلى النقطة الاختيارية (٢ ، -٣) وذلك

$$١ = \frac{٢ \text{ ص}}{٢١} - \frac{٢ \text{ س}}{٢١} \text{ لوضع القطع الزائد على الصورة}$$

فإن النقطة (٢ ، -٣) هي نقطة أصل جديدة وبالتالي فإنها تصبح

مركز القطع

$$\begin{aligned}
 & \text{إذن مركز القطع} \equiv (٣-، ٢) \\
 & \text{رأسا القطع (طرفا المحور القاطع)} \equiv (ل-أ، ك)، (ل+أ، ك) \\
 & \equiv (٣-، ٧)، (٣-، ٣-)
 \end{aligned}$$

ولتعيين البؤرتين نوجد هـ أولاً

$$٢أ = ٢(١-هـ) \quad \text{بما أن ب}^٢ = ١$$

$$١٦ = ٢٥(١-هـ)$$

$$١-هـ = \frac{١٦}{٢٥}$$

$$١ + \frac{١٦}{٢٥} = هـ$$

$$\frac{٤١}{٢٥} =$$

$$هـ = \frac{\sqrt{٤١٧}}{٥}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{بؤرتا القطع هما} \equiv (ل+أ، ك)، (ل-أ، ك) \\
 & \equiv (٢-، \frac{\sqrt{٤١٧}}{٥} \times ٥ + ٢)، (٣-، \frac{\sqrt{٤١٧}}{٥} \times ٥ - ٢) \\
 & \equiv (٣-، \sqrt{٤١٧} + ٢)، (٣-، \sqrt{٤١٧} - ٢)
 \end{aligned}$$

معادلة دلبلي القطع :

$$\frac{١}{هـ} - ل = س، \quad \frac{١}{هـ} + ل = س$$

$$\frac{٥ \times ٥}{\sqrt{٤١٧}} - ٢ = س، \quad \frac{٥ \times ٥}{\sqrt{٤١٧}} + ٢ = س$$

$$\frac{٢٥}{\sqrt{٤١٧}} - ٢ = س، \quad \frac{٢٥}{\sqrt{٤١٧}} + ٢ = س$$



معادله الخططين التقارين :

$$(ص - ك) = \pm \frac{ب}{1} (س - ل)$$

$$(ص + ٣) = \pm \frac{٤}{٥} (س - ٢)$$

$$٥ ص + ١٥ = ٤ س - ٨ ، ٥ ص - ١٥ = ٤ س - ٨$$

$$أي ٥ ص - ٤ س = ٢٣ ، ٥ ص + ٤ س = ٧$$

مثال (٤ - ١٧)

في القطع الزائد

$$٩ س^٢ - ١٦ ص^٢ = ١٨٠$$

أوجد ( أ ) إحداثيات مركز القطع

(ب) إحداثيا رأس القطع

(ح) إحداثيا بؤرتي القطع

( د ) معادلة الدليلين

(هـ) معادلة الخططين التقارين

(و) طول الوتر البؤري العمودي

(ز) ارسم شكلاً عاماً لهذا القطع

الحل :

$$(أ) \text{ بداية نضع القطع في الصورة } ١ = \frac{٢(ص-ك)}{٢٠} - \frac{٢(ل-ج)}{٢١}$$

وذلك باستخدام طريقة إكمال المربع كما يلي

$$٩ ص - ١٨ - ٩ + ١٦ - ٩ ص - ٦٤ - ٦٤ =$$

$$٦٤ - ٩ + ١٩٩ =$$

$$١٤٤ = (٩ ص - ١٨ + ٩) - (١٦ - ٩ ص - ٦٤) = (٩ ص - ٩ + ٩) - (٤ - ٤ ص + ٤) =$$

$$١٤٤ = (٩ ص - ٩) - (٤ - ٤ ص + ٤) =$$

بالقسمة على ١٤٤ تصبح معادله القطع في الصورة

$$١ = \frac{٢(٩ ص - ٩)}{٩} - \frac{٢(٤ - ٤ ص + ٤)}{١٦}$$

وباستخدام طريقة الحل في المثال السابق فإن

$$(١ - ٢) \equiv \text{مركز القطع}$$

$$(٥ - ٢) \equiv \text{رأس القطع} , (٣ - ٢) \equiv$$

(ج) لإيجاد إحداثيات بؤرتي القطع

$$٢ = ٢(١ - ٢)$$

$$٩ = ١٦(١ - ٢)$$

$$\frac{٩}{١٦} = (١ - ٢)$$

$$\frac{٢٥}{١٦} = ٢ - ٢$$

$$\frac{٥}{٤} = ٢ - ٢$$

بؤرتا القطع (٦-، ٢) ، (٤-، ٢)

(د) معادلة الدليلين :

$$\frac{1}{\text{س}} - \text{ل} = \frac{1}{\text{س}} + \text{ل} = \text{س}$$

$$\frac{11}{5} - \text{س} = \frac{21}{5} = \text{س}$$

(هـ) معادلة الخططين التقاربين : ص - ك ±  $\frac{\text{ب}}{1}$  (س - ل)

$$\text{ص} + 2 = \pm \frac{3}{4} (\text{س} - 1)$$

$$3\text{ص} + 4\text{ص} + 5 = 0 ، 3\text{ص} - 4\text{ص} - 11 = 0$$

$$(و) \text{ طول الوتر البؤري العمودي} = \frac{2\text{ب}}{1} = \frac{9 \times 2}{4} = \frac{9}{2}$$

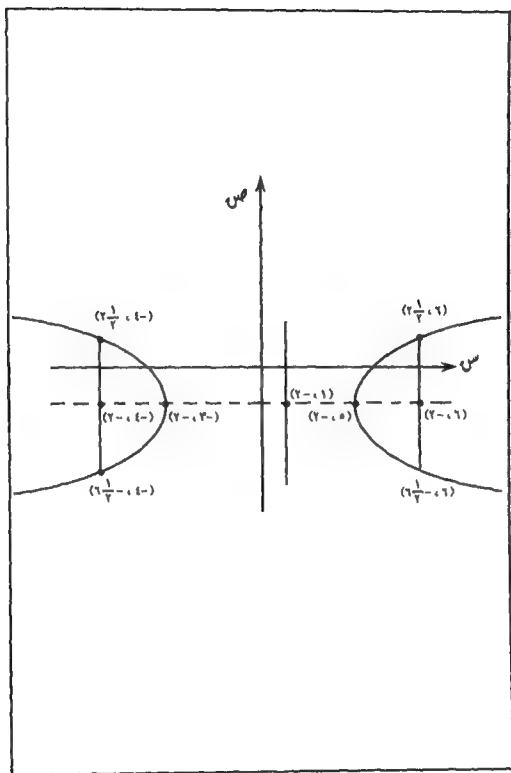
$$\equiv (6، 2 - \frac{9}{2}) ، (6، 2 + \frac{9}{2}) \text{ طرفي الوتر البؤري العمودي}$$

$$\equiv (6، 2 - \frac{1}{6}) ، (6، 2 + \frac{1}{6})$$

$$، \equiv (-4، 2 - \frac{9}{2}) ، (-4، 2 + \frac{9}{2}) \text{ طرفي الوتر البؤري العمودي المقابل}$$

$$\equiv (-4، 2 - \frac{1}{6}) ، (-4، 2 + \frac{1}{6})$$

(ز) وباستخدام النقط المستخدمة يمكن رسم الشكل العام للقطع كما يلي :



شکل (۴-۳۲)

مثال ( ٤ - ١٨ ) :

أوجد معادلة المماس والعمودي للقطع الزائد

٩ ص ٢ - ١٦ ص ٢ = ١٤٤ عند نهايتي احد الوترين البؤريين العمودين

الحل :

لحل هذا المثال نحتاج إلى مرحلتين :

المرحلة الأولى : نعين فيها الأطراف الأربعة للوترين البؤريين العمودي

وهي النقط الأربعة المطلوب تعيين معادلة المماس عندها

وذلك على النحو التالي :

$$\text{معادلة القطع هي } ١ = \frac{٢ \text{ ص}}{٩} - \frac{٢ \text{ ص}}{١٦}$$

$$٤ = أ \Leftarrow ١٦ = ٢ أ$$

$$٣ = ب \Leftarrow ٩ = ٢ ب$$

مركز القطع ( ٠ ، ٠ ) لإيجاد إحداثيا بؤرتي القطع

$$ب \text{ ٢} = أ \text{ ١} (١ - هـ)$$

$$٩ = ١٦ (١ - هـ)$$

$$١ - هـ = \frac{٩}{١٦}$$

$$\frac{٢٥}{١٦} = هـ \text{ ٢}$$

$$\frac{٥}{٤} = هـ$$

إذن بؤرتي القطع  $\equiv (ل + هـ ، أ ، ك) ، (ل - هـ ، أ ، ك)$

$$\equiv (٠ ، ٤ \times \frac{٥}{٤} - ١) ، (١ ، ٤ \times \frac{٥}{٤} + ١) \equiv$$

$$(١ ، ٥ -) ، (١ ، ٥) \equiv$$

$$\frac{٩}{٢} = \frac{٩ \times ٢}{٤} = \frac{٢٢}{١} = \text{طول الوتر البؤري العمودي}$$

أطراف أحد الوترين البؤرين

$$(\frac{٩}{٤} - ، ٥) ، (\frac{٩}{٤} ، ٥)$$

المرحلة الثانية

نوجد الميل من المشتقة الأولى للدالة

$$٠ = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \text{ ص } ٣٢ \text{ س } ١٨$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ص } ١٨}{\text{ص } ٣٢}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{ص}} \frac{٩}{١٦} = ١$$

$$\frac{٥ -}{٤} = \frac{٤ - \times ٥}{٩} \times \frac{٩}{١٦} = ٢١ \quad \frac{٥}{٤} = ٤ \times \frac{٥}{٩} \times \frac{٩}{١٦} = ١٢$$

$$\text{معادلة المماس عند النقطة الأولى} \quad \text{ص} - \frac{٥}{٤} = \frac{٩}{٤} \quad (\text{س} - ٥)$$

$$٤ \text{ ص} - ٥ = ١٦ + \text{ص}$$

$$\text{معادلة المماس عند النقطة الثانية} \quad \text{ص} + \frac{٩}{٤} = \frac{٥ -}{٤} \quad (\text{س} - ٥)$$

$$٤ \text{ ص} + ٥ = ١٦ - \text{ص}$$

## تمارين ( ٤ - ٤ )

( ١ ) إذا عملت أن الاختلاف المركزي لقطع زائد ما = ٣ وحده وأن بعد بؤرته عن دليل مناظر = ٥ وحدات فأوجد معادلة القطع منسوبة إلى محوريه .

( ٢ ) قطع زائد طول وتره البؤري العمودي = ٢ وطول نصف محوره المرافق = ٣ أوجد معادلته منسوبة إلى محوريه .

( ٣ ) أوجد معادلة القطع الزائد إذا علمت أن :

معادلة محوره القاطع هي  $s = 3$  وطوله يساوي ٦ وحدات  
ومعادلة محوره المرافق هي  $s = -5$  وطوله يساوي ١٠ وحدات .

( ٤ ) أوجد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطه ( ٣ ، ٢ ) إذا كان

معادلة خطاه التقاربان هما  $s = \pm \sqrt{3}$  .

( ٥ ) أ هي النقطه ( - ١ ، ٢ ) ، ب هي النقطه ( ٦ ، ٤ ) ، ح نقطه

تتحرك في مستويهما فإذا عملت أن  $أ - ب - ح = 12$

فأثبت أن المحل الهندسي للنقطه ج هو قطع زائد وأوجد كلا من بؤرته وخطيه المتقاربان .

( ٦ ) أوجد معادلة القطع الزائد إذا علمت أن اختلافه المركزي =  $\frac{5}{2}$   
وإن إحداثيات بؤرته هي ( ٥ ، ١ ) ومعادلة دليله المناظر هي  $s = -4$  .

( ٧ ) أ هي النقطه ( ٢ ، - ١ ) ، ب هي النقطه ( ٣ ، ٤ ) ، ح نقطه تتحرك

في مستويهما فإذا عملت أن حاصل ضرب ميلي ح أ ، ح ب =  $\frac{3}{2}$   
فأثبت إن المحل الهندسي لنقطه أ هو قطع زائد وأوجد إحداثيات كل من المركز والبؤره .

(٨) في القطع الزائد

$$1 = \frac{ص(١-ص)}{١٦} - \frac{س(٢+ص)}{٩}$$

أوجد كل من :

أ- إحداثيات المركز

ب- إحداثيات رأس القطع

ج- إحداثيات بؤرتي القطع

د- معادلة خطي التقارب

(٩) أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للقطع الزائد

عند النقطة (٢، ٢)  $ص^2 - ٢ص + ٢س = ٠$

(١٠) أوجد معادلة المماسان المشتركة للقطعين

$$١ = \frac{ص}{٢ب} - \frac{س}{١١}$$

$$١ = \frac{ص}{٢ب} - \frac{س}{١١}$$



## المصطلحات الرياضية



## الباب الأول

|                          |                                       |
|--------------------------|---------------------------------------|
| Analytic geometry        | هندسة تحليلية                         |
| Area                     | مساحة                                 |
| Bisector                 | منصف                                  |
| Centroid of the triangle | نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة للمثلث |
| Determinant              | محدد                                  |
| Distance                 | المسافة                               |
| Division point           | نقطة تقسيم                            |
| Equation                 | معادلة                                |
| Graphical representation | تمثيل بياني                           |
| Homogeneous equation     | معادلة متجانسة                        |
| Horizontal axis          | محور أفقي                             |
| Intercept form           | صور المقطعين                          |
| Locus of an equation     | المحل الهندسي لمعادلة                 |
| Mid point                | نقطة تنصيف                            |
| Parallel                 | متوازية                               |
| Passes through           | يمر خلال                              |
| Pencil of straight lines | عائلة الخطوط المستقيمة                |
| Perpendicular            | عمودي                                 |
| Plot a curve             | يرسم منحنى                            |
| Point of intersection    | نقطة التقاطع                          |
| Point - slope form       | صورة الميل ونقطة                      |
| Rectangular axes         | محاور متعامدة                         |
| Rectangular coordinates  | أحداثيات متعامدة                      |
| Slope                    | الميل                                 |
| Slope - intercept form   | صورة الميل والجزء المقطوع             |

|                          |               |
|--------------------------|---------------|
| Standard form            | صورة قياسية   |
| Straight line            | خط مستقيم     |
| The angle of inclination | زاوية الميل   |
| Two - points form        | صورة النقطتين |
| Vertex                   | رأس           |
| Vertical axis            | محور رأسي     |

## الباب الثاني

|                            |                    |
|----------------------------|--------------------|
| Center                     | مركز               |
| Chord                      | وتر                |
| Circle                     | دائرة              |
| Circumference              | محيط               |
| Coaxial circles            | دوائر متحدة المحور |
| Conjugate points           | نقط مترافقة        |
| Diameter                   | قطر                |
| Divergence                 | تباعد              |
| Eigen - conjugate triangle | مثلث مترافق ذاتي   |
| Joachimsthal's equation    | معادلة يوخيمشتال   |
| Length                     | طول                |
| Origin                     | نقطة أصل           |
| Orthogonally               | على التعامد        |
| Polar line                 | خط قطبي            |
| Quaternary                 | رباعي              |
| Radical axis               | محور أساسي         |
| Radical center             | مركز أساسي         |
| Radius                     | نصف قطر            |
| Tangent                    | مماس               |
| Tangent chord              | وتر التماس         |

### الباب الثالث

|                         |                  |
|-------------------------|------------------|
| Changing of coordinates | تغيير الأحداثيات |
| Conic sections          | قطاعات مخروطية   |
| Directrix               | دليل             |
| Eccentricity            | الاختلاف المركزي |
| Focus                   | بؤرة             |
| Geometrical properties  | خواص هندسية      |
| Latus rectum            | وتر بؤري عمودي   |
| Matrix form             | صورة مصفوية      |
| Parabola                | قطع مكافئ        |
| Rotation of axes        | دوران المحاور    |
| Subnormal               | تحت العمودي      |
| Subtangent              | تحت المماس       |
| Transformation of axes  | تحويل المحاور    |
| Translation of axes     | انتقال المحاور   |

### الباب الرابع

|                 |                  |
|-----------------|------------------|
| Asymptotes      | الخطوط التقاربية |
| Conjugate       | مرافق            |
| Conjugate axis  | المحور المرافق   |
| Ellipse         | القطع الناقص     |
| Hyperbola       | القطع الزائد     |
| Major axis      | المحور الرئيسي   |
| Right angle     | زاوية قائمة      |
| Set             | مجموعة           |
| Transverse axis | المحور القاطع    |



## المراجع





## المراجع

- [١] حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية ، الجزء الثاني ، ترجمة موفق دعبول وآخرون ، تأليف ج . ب . توماس ١٩٧٤ .
- [٢] حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية ، ترجمة د . محمد علي السمرى ، تأليف وليم هـ . دورفي ، ١٩٨٤ .
- [3] Analytical Geometry, Barry Spain, Pergamon Press, New York, 1963.
- [4] Analytic Geometry, Theory and Problems, Schoum's outline series, Joseph H. Kindle, New York, 1950.
- [5] Calculus with Analytic Geometry, Earl W. Swokowski, Prindle, Weber & Schmidt, U.S.A, 1984.
- [6] Calculus with Analytic Geometry, Howard Anton, John Wiley and Sons, New York, 1980.

تم بحمد الله





خزانة التبرجيم  
الكويت